

SÉRIE A, N° 1937
N° D'ORDRE : 2804

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR LE

GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Christian PAUC

Ancien élève de l'École Normale Supérieure
Agrégré de mathématiques

1^{re} THÈSE. — LES MÉTHODES DIRECTES EN CALCUL DES VARIATIONS ET EN GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le

, devant la Commission d'Examen.

MM. DENJOY	<i>Président</i>
FRÉCHET	} <i>Examineurs</i>
BOULIGAND	

PARIS
HERMANN ET C^{ie}, ÉDITEURS
6, RUE DE LA SORBONNE 6

—
1941



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41555823_0011

SÉRIE A, N° 1937

N° D'ORDRE : 2804

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR LE

GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Christian PAUC

Ancien élève de l'École Normale Supérieure
Agrégré de mathématiques

1^{re} THÈSE. — LES MÉTHODES DIRECTES EN CALCUL DES VARIATIONS ET EN GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le

, devant la Commission d'Examen.

MM. DENJOY	<i>Président</i>
FRÉCHET	} <i>Examinateurs</i>
BOULIGAND....	

PARIS

HERMANN ET C^{ie}, ÉDITEURS

6, RUE DE LA SORBONNE 6

—
1941

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

Doyen honoraire M. MOLLIARD.
Doyen C. MAURAIN, *Professeur*, Physique du Globe.

<i>Professeurs honoraires...</i>	H. LEBESQUE.	VESSIOT.	WINTREBEE.
	Émile PICARD.	PORTIER.	O. DUBOSCQ.
	Léon BRILLOUIN.	MOLLIARD.	BOHN.
	PÉCHARD.	LAPICQUE.	E. RABAUD.
	FREUNDLER.	G. BERTRAND.	M. CAULLERY
	AUGER.	Charles FABRY.	J. PERRIN.
	DANGEARD.	Léon BERTRAND.	E. CARTAN.
	LESPIEAU.		

PROFESSEURS

Émile BOREL	T	Calcul des probabilités et Physique mathématique.	PRENANT	T	Anatomie et histologie comparées.
A. COTTON.....	T	Recherches physiques.	VILLEY		Mécanique physique et expérimentale.
J. DRACH.....	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.	COMBES	T	Physiologie végétale.
Charles PÉREZ	T	Zoologie.	GARNIER	T	Application de l'analyse à la Géométrie.
M. GUICHARD.....	T	Analyses et mesures chimiques.	PÉRÈS		Mécanique théorique et des fluides.
Paul MONTEL	T	Théorie des fonctions.	HACKSPILL	T	Chimie minérale.
L. BLARINGHEM ...	T	Botanique.	TOUSSAINT		Technique Aéronaut.
G. JULIA	T	Mécanique analytique et mécan. céleste.	M. CURIE		Physique (P. C. B.).
C. MAUGUIN	T	Minéralogie.	G. RIBAUD	T	Hautes températures
A. DENJOY	T	Géométrie supérieure.	CHAZY.....	T	Mécanique rationnelle.
L. LUTAUD	T	Géographie physique et géologie dynamique.	GAULT		Chimie (P. C. B.).
			CROZE		Recherches physiques
G. BRUHAT	T	Physique théorique et physique céleste.	DUPONT.....	T	Théories chimiques.
E. DARMOIS	T	Enseignement de Physique.	LANQUINE.....	T	Géologie structurale et Géologie appliquée.
A. DEBIERNE	T	Physique générale et radioactivité.	VALIRON		Mathématiques génér.
A. DUFOUR.....	T	Physique (P. C. B.).	BARRABÉ.....		Géologie structurale et géologie appliquée.
L. DUNOYER	T	Optique appliquée.	MILLOT.....		Biologie animale (P. C. B.).
A. GUILLERMOND ..	T	Botanique.	F. PERRIN		Théories physiques.
M. JAVILLIER.....	T	Chimie biologique.	VAVON.....		Chimie organique.
Henri VILLAT.....	T	Mécanique des fluides et applications.	G. DARMOIS.....		Calcul des probabilités et Physique-Mathématique.
Ch. JACOB	T	Géologie.	CHATTON.....	T	Biologie maritime.
P. PASCAL	T	Chimie générale.	AUBEL.....		Chimie biologique.
M. FRÉCHET.....	T	Calcul différentiel et calcul intégral.	Jacques BOURCART ..		Géographie physique et Géologie dynamique.
E. ESCLANGON.....	T	Astronomie.			
M ^{me} RAMART-LUCAS	T	Chimie organique.	M ^{me} JOLIOT-CURIE..		Physique générale et Radioactivité.
H. BÉGHIN.....	T	Mécanique physique et expérimentale.	PLANTEFOL		Biologie végétale (P. C. B.).
FOCH.....	T	Mécanique expérimentale des fluides.	CABANNES.....		Enseignement de Physique.
PAUTHENIER		Physique (P. C. B.).	GRASSÉ	T	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
De BROGLIE	T	Théories physiques.	PRÉVOST.....		Chimie (P. C. B.).
CHRÉTIEN.....		Optique appliquée.	BOULIGAND		Mathématiques.
LABROUSTE		Physique du Globe.			

Secrétaire A. PACAUD.
Secrétaire honoraire..... D. TOMBECK.



AVERTISSEMENT

On trouvera dans ce qui suit le résultat des études de l'auteur sur les méthodes directes en Calcul des Variations et en Géométrie Différentielle. Nous avons cru rendre service en encadrant celles-ci dans un exposé d'ensemble de très importantes recherches sur ces sujets dues principalement à MM. Bouligand et Menger et encore insuffisamment connues. Nous dégageons notre apport personnel dans les deux résumés qui suivent.

RÉSUMÉ DES RECHERCHES DE L'AUTEUR EN CALCUL DES VARIATIONS

Nous nous sommes occupés des notions géométriques dont plusieurs sont dues à M. Fréchet, qui sont utilisées en Calcul des Variations ; nous avons défini la notion de représentation propre d'une courbe sous la forme suivante : une représentation $\mathbf{p}$ d'une courbe $\mathcal{C}$ définie sur un intervalle fermé de nombres $[\alpha\beta]$ est appelée par nous « propre » si le point $\mathbf{p}(\tau)$ n'est immobile sur aucun sous-intervalle $[\xi_1\xi_2]$ de $[\alpha\beta]$ avec $\xi_1 < \xi_2$; la définition de l'égalité de deux courbes $\mathcal{C}_1 : \mathbf{p}_1[\alpha_1\beta_1]$, $\mathcal{C}_2 : \mathbf{p}_2[\alpha_2\beta_2]$, donnée par M. Fréchet s'applique lorsque les représentations $\mathbf{p}_1$ et $\mathbf{p}_2$ sont propres ; nous avons défini la relation $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$ lorsque $\mathbf{p}_1$ et $\mathbf{p}_2$ sont des représentations paramétriques quelconques de $\mathcal{C}_1$ et de $\mathcal{C}_2$. Nous avons introduit la notion de sous-courbe d'une courbe.

$\mathcal{C}$ étant une courbe de l'espace distancié $\mathcal{H}$ ($\delta(ab)$ = distance de a à b), $\varphi(x,y)$ une fonction finie des couples ordonnés (x, y) d

points distincts de $\mathcal{H}$, nous avons considéré comme des intégrales les longueurs supérieure et inférieure de $\mathcal{C}$ dans la métrique

$$\delta_{(\psi)}(xy) = \begin{cases} \psi(x, y) \cdot \delta(xy) & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y, \end{cases}$$

soit $\overline{\lambda}_{(\psi)}(\mathcal{C})$ et $\underline{\lambda}_{(\psi)}(\mathcal{C})$; nous avons recherché une condition nécessaire et suffisante pour que $\overline{\lambda}_{(\psi)}(\mathcal{C}) = \underline{\lambda}_{(\psi)}(\mathcal{C})$ lorsque $\mathcal{C}$ est un intervalle $[\alpha\beta]$ de nombres parcouru de α vers β , en introduisant les fonctions ψ_i et ψ_s définies pour les ξ de $[\alpha\beta]$ par

$$\left. \begin{aligned} \psi_i(\xi) &= \liminf_{\substack{\tau' \\ \tau'' \rightarrow \xi}} \psi(\tau', \tau'') \\ \psi_s(\xi) &= \limsup_{\substack{\tau' \\ \tau'' \rightarrow \xi}} \psi(\tau', \tau'') \end{aligned} \right\} \text{ pour } \tau' \neq \tau'', \tau' \leq \xi \leq \tau'' ;$$

nous avons montré que, si ψ est borné sur l'ensemble des couples (ξ', ξ'') de valeurs de $[\alpha\beta]$ avec $\xi' < \xi''$, la condition

$$\text{presque partout sur } [\alpha\beta] \quad \psi_i = \psi_s$$

est nécessaire pour que $\overline{\lambda}_{(\psi)} = \underline{\lambda}_{(\psi)}$, et présumé qu'elle était suffisante ce qui a été vérifié peu après par M. Aronszajn ; nous avons en outre montré que, si elle est satisfaite

$$\overline{\lambda}_{(\psi)}(\mathcal{C}) = \underline{\lambda}_{(\psi)}(\mathcal{C}) = \int_{\alpha}^{\beta} \psi_i(\tau) \cdot d\tau = \int_{\alpha}^{\beta} \psi_s(\tau) \cdot d\tau,$$

les deux intégrales de droite étant entendues au sens de Lebesgue.

$\varphi(\xi_1, \dots, \xi_n, \xi'_1, \dots, \xi'_n)$ étant un intégrant paramétrique du Calcul des Variations (donc une fonction finie, positivement homogène du premier degré en $\xi'_1, \dots, \xi'_n$) de champ H , nous avons étudié avec M. Menger les propriétés d'existence et de semi-continuité de la longueur λ_{φ} des courbes $\mathcal{C}$ de $\mathcal{E}_n$ situées sur H , relativement à la métrique

$$\delta_{\varphi}(xy) = \varphi(\xi_1, \dots, \xi_n, r_1 - \xi_1, \dots, r_n - \xi_n),$$

$x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $y = (r_1, \dots, r_n)$ représentant deux points quelconques de H .

Nous inspirant de M. Menger, nous disons que φ est quasi-régulier au point x_0 de H lorsque $\varphi(x_0, \xi'_1, \dots, \xi'_n)$ est une fonction convexe en $\xi'_1, \dots, \xi'_n$, régulier en x_0 si $\varphi(x_0, \xi'_1, \dots, \xi'_n)$ est une fonc-

tion strictement convexe en $\xi'_1, \dots, \xi'_n$; nous parlons de quasi-régularité semi-normale de φ en x_0 si $\varphi(x_0, \xi'_1, \dots, \xi'_n)$ est une fonction convexe en $\xi'_1, \dots, \xi'_n$ n'admettant pas de directions de linéarité. Nous avons vérifié que la quasi-régularité et la quasi-régularité semi-normale au sens précédent coïncident, lorsque $n = 2$ et que φ satisfait aux hypothèses de dérivabilité de Tonelli, avec les notions du même nom chez cet auteur, mais que la régularité au sens précédent correspond à la quasi-régularité normale de Tonelli. De théorèmes de M. Menger résulte aussitôt que la continuité et la quasi-régularité de φ entraînent l'existence et la semi-continuité inférieure de λ_φ sur toute famille de courbes de $\mathcal{E}_n$ situées sur H de longueurs uniformément bornées, et que la continuité et la quasi-régularité semi-normale de φ entraînent l'existence et la semi-continuité inférieure de λ_φ sur la famille de toutes les courbes de $\mathcal{E}_n$ situées sur H . Faisant systématiquement usage de la méthode métrique, nous avons établi les théorèmes de semi-continuité de Tonelli (vol. 1 de ses *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*) pour la fonctionnelle λ_φ en faisant sur φ des hypothèses différant de celles de Tonelli en ceci : elles ne supposent aucune condition de dérivabilité pour φ (cf. les définitions indiquées plus haut) ; en outre, nos théorèmes sont valables pour n quelconque ≥ 2 . Ils généralisent donc ceux de Tonelli grâce à un théorème de M. Aronszajn selon lequel, lorsque φ est une fonction continue, λ_φ existe sur toute courbe rectifiable de $\mathcal{E}_n$ située sur H et coïncide avec l'intégrale de Lebesgue-Tonelli de φ le long de $\mathcal{C}$. Nous avons remarqué que, si l'intégrant φ quasi-régulier en un point x_0 de H y admet des dérivées premières finies en $\xi'_1, \dots, \xi'_n$, il y est soit linéaire en $\xi'_1, \dots, \xi'_n$, soit quasi-régulier semi-normal, ce qui nous a permis d'expliquer, pourquoi dans la théorie de Tonelli, si φ est continu, non négatif et quasi-régulier, la fonctionnelle λ_φ est semi-continue inférieurement sur la famille de toutes les courbes rectifiables de $\mathcal{E}_n$ situées sur H alors qu'il n'en est plus de même si nous abandonnons l'hypothèse de dérivabilité précédente pour φ .

Nous avons interprété les propriétés de quasi-régularité et de régularité d'un intégrant correspondant aux nouvelles définitions au moyen de la figurative de M. Hadamard et appliqué cet interprétation à l'intégrant φ défini à partir d'un ensemble E fermé de $\mathcal{E}_2$ de la manière suivante :

$x = (\xi_1, \xi_2)$ désignant un point quelconque de $\mathcal{E}_2 - E$, $\rho(\xi_1, \xi_2)$ la plus courte distance de x à E , x' un vecteur quelconque de $\mathcal{E}_2$ de composantes ξ'_1, ξ'_2 .

$$\varphi(x, x') = \lim_{\lambda} \frac{\rho(\xi_1 + \lambda\xi'_1, \xi_2 + \lambda\xi'_2) - \rho(\xi_1, \xi_2)}{\lambda}$$

pour λ positif tendant vers 0.

RÉSUMÉ DES RECHERCHES DE L'AUTEUR EN GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE DIRECTE

Nous avons démontré que les continus euclidiens dont le contingent en chaque point est non connexe ou qui admettent en chacun de leurs points une tangente unique appartiennent à la catégorie des « sommes d'arcs héréditaires » étudiées par M. Harold.

Répondant à une question posée par M. Fréchet nous avons établi que la condition nécessaire et suffisante pour que, une courbe $\mathcal{C}$ ayant une tangente unique en un point p située sur elle, il existe une représentation paramétrique propre de $\mathcal{C}$ admettant une dérivée non nulle pour la valeur τ du paramètre correspondant à p , est que l'oscillation sur la courbe $\mathcal{C}$ au voisinage de p soit un infiniment petit équivalent à la corde.

M. Ward s'occupant d'un problème de M. Fréchet avait démontré que si une courbe $\mathcal{C}$ admet en chacun de ses points une tangente, il existe au moins une représentation paramétrique de $\mathcal{C}$ admettant presque partout sur son intervalle de définition une dérivée non nulle ; nous avons montré qu'il en est ainsi pour toutes les représentations propres de $\mathcal{C}$.

Appelant I_{strict} la propriété pour un continu euclidien K en un de ses points p_0 , d'avoir une paratingente unique en ce point, nous avons, faisant usage d'une proposition de M. Bouligand, reconnu que la traduction métrique de cette propriété était la suivante : les triplets de points de K voisins de p_0 possèdent un angle voisin de π et montré que si un continu distancié K jouit

en p_0 de cette propriété, un voisinage de p_0 sur K est un arc rectifiable.

Nous avons établi que, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un continu K de l'espace euclidien $E_n (n < 1)$ admette en un de ses points p_0 une courbure de Alt finie (Propriété II), est qu'un voisinage de p_0 sur K soit un arc susceptible dans un système d'axes convenables d'être représenté sous la forme

$$\xi_i = \varphi_i(\xi_1), \quad \alpha \leq \xi_1 \leq \beta, \quad i = 2, \dots, n,$$

les fonctions φ_i étant continues et ayant pour la valeur de ξ_1 correspondant au point p_0 une dérivée seconde au sens large finie ; nous avons reconnu que II implique I_{strict} dans les espaces euclidiens, plus généralement dans les espaces tétraédraux de M. L. Blumenthal mais qu'il n'en est plus de même dans les espaces distanciés généraux. Si un continu distancié K admet en un de ses points p_0 une courbure de Alt finie, nous pouvons seulement affirmer qu'un voisinage de p_0 sur K est un « n -Bein » ou « ω -Bein » à branches rectifiables.

PREMIÈRE PARTIE

**LA MÉTHODE MÉTRIQUE
EN CALCUL DES VARIATIONS**



INTRODUCTION HISTORIQUE

« C'est en 1879 que Weierstrass signale que la notion d'intégrale telle qu'elle avait été définie par Riemann ne pouvait suffire aux besoins du Calcul des Variations et il propose dans ses « Vorlesungen über Variationsrechnung » une définition de l'intégrale qui semblait et était en fait plus large que celle de Riemann et qui se présentait comme la généralisation naturelle de celle de la longueur d'une courbe ; appliquée à des courbes douées d'une tangente variant continuellement, admettant éventuellement un nombre fini de points anguleux, la nouvelle intégrale existait et coïncidait avec l'intégrale de Riemann » (63, 448) (1).

Voici cette définition :

$\varphi(\xi_1, \xi_2, \xi'_1, \xi'_2)$ étant une fonction finie et continue ainsi que ses dérivées partielles des trois premiers ordres en tous les points (ξ_1, ξ_2) d'un ensemble fermé A du plan et pour tous les couples (ξ'_1, ξ'_2) de nombres finis non simultanément nuls, positivement homogène de degré 1 relativement à ξ'_1 , et ξ'_2 , C une courbe rectifiable plane intérieure à A définie par $\xi_1 = \xi_1(\tau)$, $\xi_2 = \xi_2(\tau)$, $\alpha \leq \tau \leq \beta$, Weierstrass forme pour toute subdivision $\tau_0 = \alpha$, $\tau_1, \dots, \tau_{m+1} = \beta$ de $[\alpha, \beta]$

$$\text{somme } \varphi(\xi_1(\tau_i), \xi_2(\tau_i), \xi_1(\tau_{i+1}) - \xi_1(\tau_i), \xi_2(\tau_{i+1}) - \xi_2(\tau_i)); \\ i = 0, \dots, m$$

si lorsque la plus grande des différences $\tau_{i+1} - \tau_i$ tend vers 0, cette somme tend vers une limite finie, cette limite est l'intégrale de Weierstrass de φ relativement à C (63, 450).

Osgood, en 1901 (55, 273), établit l'existence de l'intégrale de

(1) 63 renvoie à la bibliographie placée à la fin de la première partie, 448 indique la page.

Weierstrass lorsque φ et sa fonction de Legendre (§ 3, 2.1) sont > 0 ; il démontre (55, 293) que cette intégrale lorsqu'elle existe est la limite des intégrales de Riemann le long des lignes polygonales d'une suite tendant vers $\mathcal{C}$.

L'intégrale de Weierstrass tombe ensuite dans l'oubli ; une des raisons en est que son maniement ne rentre pas dans le cadre des procédés de calcul alors utilisés, une autre que depuis la Thèse de M. Lebesgue (1901), l'intégrale de Lebesgue par son élégance et sa généralité conquiert de plus en plus le monde mathématique ; M. Tonelli en 1912 se rend compte qu'elle résout les difficultés rencontrées par Weierstrass ; il prouve sous certaines hypothèses (§ 4, 1) l'existence de l'intégrale de Weierstrass et sa coïncidence avec l'intégrale curviligne de Lebesgue ; il développe en se basant sur elle et sur les principes d'Analyse Fonctionnelle posés par Volterra, Baire, Fréchet, sa méthode directe en Calcul des Variations telle qu'elle est exposée dans son ouvrage fondamental (66-67).

Ainsi l'intégrale de Weierstrass un instant ressuscitée, rentre dans l'oubli.

L'idée de considérer l'intégrale curviligne du Calcul des Variations comme une longueur généralisée ne disparaît toutefois pas entièrement ; Finsler s'en sert dans sa Thèse (16) pour rendre plus intuitives certaines notions en relation avec un intégrant.

M. Fréchet en 1925 (20, 211-212) remarque que la géométrie nous suggère pour une courbe plane $\xi = \xi(\tau)$, $\eta = \eta(\tau)$, $\alpha \leq \tau \leq \beta$ la définition de l'intégrale $\int_{\mathcal{C}} \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2}$ comme limite de

$$\sum_{i=0, \dots, m} \sqrt{(\xi(\tau_{i+1}) - \xi(\tau_i))^2 + (\eta(\tau_{i+1}) - \eta(\tau_i))^2}$$

relativement à la subdivision $\tau_0 = \alpha$, $\tau_1, \dots, \tau_{m+1} = \beta$, lorsque la plus grande des différences $\tau_{i+1} - \tau_i$ tend vers 0.

C'est à MM. Bouligand et Menger que revient le mérite d'avoir introduit directement la longueur généralisée dans les raisonnements. M. Bouligand en 1933 (10, 32-50) définit pour un intégrant paramétrique $\varphi(\xi_1, \xi_2, \xi'_1, \xi'_2)$ du plan $\mathcal{E}_2$ la longueur d'une courbe suivant φ , (§ 2, 2) ; supposant que φ est continu, positif et à figurative strictement convexe, il en montre l'existence et la semi-continuité inférieure sur les courbes rectifiables de $\mathcal{E}_2$; il établit en outre la propriété d'équivalence entre l'arc et la corde infini-

ment petits pour une géodésique entre deux points relativement à la longueur suivant φ . M. Menger introduit en 1928 (42, 76-113) la notion de convexité dans les espaces distanciés et établit l'existence d'un segment joignant deux points dans tout espace distancié convexe et compact, plus généralement convexe et complet; ses procédés sont utilisés en 1931 par MM. Gołab et Härten (22), en 1932 par M. Gołab (23) pour l'étude des géodésiques dans les espaces de Minkowski; en 1930, M. Menger (43, 492) s'occupe de l'existence de géodésiques dans les espaces distanciés compacts; en 1935 (45) il montre l'existence de la longueur et sa semi-continuité inférieure dans les espaces presque distanciés (fastmetrische Räume) et applique ses résultats au cas défini positif du Calcul des Variations; il met en évidence l'importance fondamentale de l'inégalité triangulaire, éventuellement généralisée, pour assurer l'existence et la semi-continuité inférieure de la longueur, et déduit de la quasi-régularité d'un intégrant paramétrique classique $\varphi(\xi_1, \xi_2, \xi'_1, \xi'_2)$ une inégalité triangulaire affaiblie (45, 445) pour l'écart

$$\delta_\varphi(xy) = \varphi(\xi_1, \xi_2, \eta_1 - \xi_1, \eta_2 - \xi_2); \quad x = (\xi_1, \xi_2), \quad y = (\eta_1, \eta_2).$$

Bien qu'aient été ainsi posés les principes de la recherche métrique, une difficulté en empêchait cependant l'application au cas indéfini du Calcul des Variations: dans l'espace métrique ⁽²⁾ où on étudiait les propriétés de la longueur, l'écart déterminait la notion de limite; il était donc assujéti à être > 0 pour deux points distincts.

M. Menger la résoud à la fin de 1935 (46) par la considération simultanée d'une métrique primaire pourvue des propriétés habituelles d'une distance au sens de Fréchet, définissant la topologie et d'une métrique secondaire de signe quelconque définie par l'intermédiaire d'un intégrant (§ 2, 1.4), la fonctionnelle étudiée étant la longueur dans l'espace secondaire; son point de vue dans le cas d'une métrique primaire euclidienne rejoint celui de M. Bou-

⁽²⁾ Nous entendons actuellement avec M. Aronszajn par *espace métrique (général)* — chez Menger (50,5) « Raum mit reellen Abständen » — un ensemble tel qu'à deux quelconques de ses points x et y ait été associé un nombre réel fini, l'écart $\rho(xy)$, positif, négatif ou nul, assujéti à l'unique condition $\rho(xx) = 0$; l'écart ρ est appelé une *distance* et l'espace métrique un *espace distancié* (en allemand: metrischer Raum) lorsque sont vérifiés les axiomes de Fréchet: 1) $\rho(xy) = 0$ équivaut à $x = y$; 2) $\rho(xy) = \rho(yx)$; 3) $\rho(xz) \leq \rho(xy) + \rho(yz)$.

ligand ; en 1936 (47, 48, 49, 50), il développe systématiquement sa méthode directe en Calcul des Variations dont les applications font l'objet du présent ouvrage. La théorie de Menger, comme celle de Tonelli, vise d'abord à l'obtention de théorèmes d'existence de minimantes et maximantes ; elle met en œuvre les mêmes principes d'Analyse Générale que la méthode de Tonelli, s'occupant en particulier toujours de la semi-continuité de la fonctionnelle. Mais, alors que chez Tonelli, cette semi-continuité est établie par des procédés de calcul sur l'intégrale de Lebesgue où la propriété de quasi-régularité de l'intégrant intervient par une formule de Schwarz (66, 209), chez Menger, elle est établie, comme d'ailleurs l'existence de la longueur généralisée, par des raisonnements métriques directs où la quasi-régularité de l'intégrant se traduit par une inégalité triangulaire.

En 1937, MM. Alt (1), Aronszajn (3) et Pauc (58) traduisent géométriquement les propriétés de l'intégrant euclidien utilisées par Menger par des propriétés de convexité de l'indicatrice de Caratheodory définie pour un intégrant de signe quelconque.

En 1938, M^{lle} von Schwarz (60, 273-284) et M. Pauc (57) précisent et complètent les notions géométriques intervenant en Calcul des Variations et dont les principales ont été en 1906 introduites par M. Fréchet (17) ; une telle précision est rendue nécessaire par la grande généralité à laquelle conduit l'emploi des méthodes métriques ; en outre, M^{lle} von Schwarz (60, 284-295) applique avec succès les méthodes métriques aux problèmes variationnels concernant les dérivées supérieures.

En 1939, M. Pauc (59) met au point et complète la théorie de Menger dans les espaces euclidiens ; celle-ci ne concerne que le cas paramétrique ; M. Aronszajn (5) l'adapte au cas ordinaire : Dès ce moment, le champ d'action des procédés métriques embrasse celui des méthodes directes antérieures. Nous signalons pour terminer un article de M. Busemann (13) où sont étudiées certaines propriétés locales de l'espace métrique secondaire dans le cas d'un intégrant défini positif et régulier.

L'auteur remercie M. Fréchet d'avoir encouragé ses recherches et facilité leur publication ; il tient aussi à exprimer sa reconnaissance à M. Menger auprès de qui, à Vienne, il s'est initié à la méthode métrique, à M. Tonelli qui a porté intérêt à son travail et lui a signalé de nombreuses références, à M. Aronszajn qui a lu le manuscrit et lui a communiqué ses observations.

LA MÉTHODE MÉTRIQUE EN CALCUL DES VARIATIONS

PRÉLIMINAIRES GÉOMÉTRIQUES

Ayant en vue une étude géométrique du Calcul des Variations, nous avons besoin de préciser la notion de courbe de Jordan et les notions qui lui sont liées comme celles de l'égalité et de la distance de deux courbes de Jordan ; rappelons que les principales d'entre elles ont été considérées pour la première fois par M. Fréchet dans sa Thèse (17) ; en raison de leur caractère intuitif et apparemment simple, comme la plupart sont d'usage courant, nous les présentons ici axiomatiquement ce qui abrège l'exposition.

1. Généralités sur les ensembles ordonnés. — $\mathcal{J}$ étant un ensemble ordonné (Déf. ⁽³⁾ 30, 42), — par exemple un ensemble de nombres avec pour le signe $<$ la signification habituelle —, u et v désignant deux de ses éléments avec $u \leq v$, l'intervalle fermé $[uv]$, l'intervalle ouvert (uv) et les intervalles mixtes $u\bar{v}$ et $\bar{u}v$ se définissent respectivement ainsi ^(3') :

$$\begin{aligned} x \in [uv] &\sim u \leq x \leq v; & x \in (uv) &\sim u < x < v \\ x \in u\bar{v} &\sim u < x \leq v; & x \in \bar{u}v &\sim u \leq x < v. \end{aligned}$$

Soit t un élément quelconque de $\mathcal{J}$, nous représentons par t_g tout élément de $\mathcal{J}$ précédant t : $t_g < t$, par t_d tout élément de $\mathcal{J}$

⁽³⁾ Déf. = abréviation pour Définition.

^(3') Nous utilisons le signe $\sim$ pour l'équivalence logique, $\rightarrow$ pour l'implication logique ; $x \in X$ se lit : x est élément de X , ou : x appartient à X , $X \subseteq Y$: X est inclus dans Y , $X \subset Y$: X est inclus dans Y au sens strict, c'est-à-dire égalité exclue.

suivant t : $t < t_a$ et nous organisons $\mathcal{S}$ en espace topologique (Déf. 21, 172) en prenant comme voisinages de t les ensembles

$(t_g t_a)$	lorsque t admet des t_g et des t_a ,
$(t_g t]$	lorsque t admet des t_g mais non des t_a ,
$[t t_a)$	lorsque t admet des t_a mais non des t_g ,
$[t t]$	lorsque t n'admet ni t_g ni t_a .

$\mathcal{S}$ est alors un espace de Hausdorff (Déf. 21, 186).

$\mathcal{S}'$ étant un autre ensemble ordonné, par *similitude au sens large* entre $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$, nous entendons une relation S (Déf. 27, 2-4) appliquant $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ l'un sur l'autre et telle que, pour deux couples quelconques d'éléments associés (x, x') et (y, y')

$$(x < y) \rightarrow (x' \leq y') \text{ (}^4\text{)};$$

S est dite une *similitude* sans plus lorsqu'elle est biunivoque ; une similitude entre $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ est donc une relation S appliquant $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ l'un sur l'autre et telle que, pour deux couples quelconques d'éléments associés (x, x') et (y, y') .

$$(x < y) \rightarrow (x' < y').$$

2. Images d'ensembles ordonnés dans un ensemble. — Considérons un ensemble H de points, non vide, O désignant le sous-ensemble vide et attribuons à tout élément x de S un point $\mathbf{p}(x)$ de H. L'ensemble T des points $\mathbf{p}(x)$ pour x variable dans S est un sous-ensemble de H ; nous voulons ici introduire une notion nouvelle, celle de l'*image* $\mathcal{C}$ de $\mathcal{S}$ par l'*application* $\mathbf{p}$; si la correspondance $p = \mathbf{p}(x)$ est biunivoque, il est naturel d'ordonner T de manière que cette correspondance soit une similitude et de considérer que l'image de $\mathcal{S}$ par $\mathbf{p}$ est cet ensemble ainsi ordonné ; mais en général, quand il existe des couples d'éléments distincts x_1 et x_2 de $\mathcal{S}$ avec $\mathbf{p}(x_1) = \mathbf{p}(x_2)$, cette interprétation n'est plus possible ; si nous pensons alors au cas où $\mathcal{S}$ est un intervalle de temps, $\mathbf{p}(x)$ un mobile, T nous apparaît comme un *ensemble doué d'une loi de parcours* et il semble raisonnable de se représenter intuitivement encore ainsi $\mathcal{C}$ dans le cas général. Nous n'allons pas donner de $\mathcal{C}$ une définition formelle (Cf. 54, 920), mais poser

(⁴) Dans le cas où S et S' sont des intervalles de nombres nous avons l'*ordnungstreue Abbildung* » de J. von Schwarz (60, 275).

les conventions qui vont assurer le maniement de la nouvelle notion ce qui du point de vue purement mathématique, seul présente de l'intérêt : nous notons la dépendance entre l'application $\mathbf{p}$, l'ensemble ordonné $\mathcal{S}$ et $\mathcal{C}$ par

$$\mathcal{C} : \mathbf{p}(\mathcal{S})$$

et nous nommons $\mathbf{p}$ une *représentation paramétrique* de $\mathcal{C}$; nous appelons l'ensemble T le *support* de $\mathcal{C}$ et nous disons que a est un point de $\mathcal{C}$ lorsqu'il est point de T .

Si $\mathcal{S}$ possède un élément initial, son image par $\mathbf{p}$ est appelée *point initial* de $\mathcal{C}$; si $\mathcal{S}$ possède un élément final son image par $\mathbf{p}$ est appelée *point final* de $\mathcal{C}$; $\mathcal{C}$ est dite *fermée* lorsqu'elle admet un point initial et un point final confondus.

a étant un point de H , nous représentons par $[\mathbf{p}(x) = a]$ l'*ensemble original* (Urbildmenge) de a , c'est-à-dire l'ensemble des éléments x de S tels que $\mathbf{p}(x) = a$; a est un point de T lorsque cet ensemble est non vide.

La *représentation* $\mathbf{p}$ de $\mathcal{C}$ est dite *propre* lorsque, quel que soit a de $\mathcal{C}$, l'ensemble $[\mathbf{p}(x) = a]$ n'inclut aucun vrai intervalle fermé, c'est-à-dire un intervalle $[x_1 x_2]$ avec $x_1 < x_2$.

2. 1. Définition de l'égalité $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$. Notion de « point sur $\mathcal{C}$ ». — Soient $\mathbf{p}$ et $\mathbf{p}'$ deux applications dans H des ensembles ordonnés $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ respectivement, $\mathcal{C} : \mathbf{p}(\mathcal{S})$, $\mathcal{C}' : \mathbf{p}'(\mathcal{S}')$; nous posons $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$ lorsqu'il existe entre $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ une similitude au sens large S vérifiant

$$\mathfrak{R}_0 \left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout couple } (x, x') \text{ d'éléments associés par } S : \\ \mathbf{p}(x) = \mathbf{p}'(x'). \end{array} \right.$$

Si cette condition est vérifiée, $\mathbf{p}$ et $\mathbf{p}'$ sont à considérer comme deux représentations paramétriques du même élément géométrique $\mathcal{C}$, ou encore comme *deux représentations paramétriques équivalentes* ; désormais la notion d'image d'un ensemble ordonné a un sens précis ; nous disons qu'un élément, une notion,... exprimés au moyen d'une représentation paramétrique de $\mathcal{C}$ sont *liés intrinsèquement* à $\mathcal{C}$ lorsque leur signification ne dépend pas de la représentation particulière de $\mathcal{C}$ considérée ; c'est le cas pour les notions de point initial et de point final de $\mathcal{C}$.

Lorsque $\mathbf{p}$ et $\mathbf{p}'$ sont des *représentations propres*, une similitude au sens large S vérifiant $\mathfrak{R}_0$ est nécessairement une similitude.

A la définition précédente se relie la notion suivante : $\mathcal{C}$ étant l'image de l'ensemble ordonné $\mathcal{I}$ par l'application $\mathbf{p}$, x un élément de $\mathcal{I}$, nous convenons de considérer à côté du point $\mathbf{p}(x)$ de $\mathbf{H}$ un nouveau point $\mathfrak{p}$ dit *point sur* $\mathcal{C}$ dont nous exprimons la liaison avec la représentation $\mathbf{p}$ et l'élément x par la notation $\mathfrak{p} : \mathbf{p}(x)$ ou $\mathfrak{p} = \tilde{\mathbf{p}}(x)$. $\mathcal{C}'$ étant l'image d'un ensemble ordonné $\mathcal{I}'$ par une application $\mathbf{p}'$, y' un élément de $\mathcal{I}'$ et $\mathfrak{p}' : \mathbf{p}'(y')$, nous posons $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'$ lorsqu'il existe entre $\mathcal{I}$ et $\mathcal{I}'$ une similitude au sens large associant x et y' et vérifiant $\mathfrak{R}_0$, par conséquent

$$(\mathfrak{p} = \mathfrak{p}') \rightarrow ((\mathcal{C} = \mathcal{C}') \text{ et } (\mathbf{p}(x) = \mathbf{p}'(y')));$$

le point $p = \mathbf{p}(x)$ de $\mathbf{H}$ correspondant au point $\mathfrak{p} = \tilde{\mathbf{p}}(x)$ sur $\mathcal{C}$ est appelé le *support de* $\mathfrak{p}$ et nous écrivons $p = |\mathfrak{p}|$. $\mathcal{C}$ étant fixé, l'ensemble des points $\mathfrak{p}$ sur $\mathcal{C}$ s'organise en un ensemble ordonné $\tilde{\mathcal{C}}$ par la convention suivante : $\mathfrak{p} < \mathfrak{p}'$ ou $\mathfrak{p}' > \mathfrak{p}$ lorsque S désignant une similitude au sens large entre $\mathcal{I}$ et $\mathcal{I}'$ vérifiant $\mathfrak{R}_0$, tout élément x' de $\mathcal{I}'$ adjoint à x par S précède y' . Ces définitions se simplifient lorsqu'on compare des $\mathfrak{p}$ définis à l'aide de la même représentation paramétrique $\mathfrak{p}_1 : \mathbf{p}(x_1)$, $\mathfrak{p}_2 : \mathbf{p}(x_2)$, x_1 et x_2 étant deux éléments de $\mathcal{I}$; il est aisé de vérifier que

$$\begin{aligned} (\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2) &\sim (\text{pour tout } x \text{ de } [x_1 x_2] : \mathbf{p}(x) = \mathbf{p}(x_1) = \mathbf{p}(x_2)) \\ (\mathfrak{p}_1 \geq \mathfrak{p}_2) &\sim (x_1 \geq x_2) \\ (\mathfrak{p}_1 > \mathfrak{p}_2) &\sim (x_1 > x_2) \quad \text{et} \quad \text{non } (\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2); \end{aligned}$$

enfin si $\mathbf{p}$ est une représentation propre

$$(\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2) \sim (x_1 = x_2) \quad (\mathfrak{p}_1 > \mathfrak{p}_2) \sim (x_1 > x_2),$$

la correspondance entre x et $\tilde{\mathbf{p}}(x)$ est dans ce cas une similitude; l'application définie sur $\tilde{\mathcal{C}}$ par $p = |\mathfrak{p}|$ est donc une représentation propre de $\mathcal{C}$.

2. 2. Relation d'inclusion entre les $\mathcal{C}$. Confinité. — Reprenant les notations introduites au début de l'alinéa précédent nous posons que

$\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ ou $\mathcal{C} \supseteq \mathcal{C}'$ lorsque $\mathcal{I}$ admet un sous-ensemble $\mathcal{I}^*$ tel que, si $\mathcal{C}^* : \mathbf{p}(\mathcal{I}^*)$, nous ayons $\mathcal{C}' = \mathcal{C}^*$,

$\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ ou $\mathcal{C} \supset \mathcal{C}'$ lorsque $\mathcal{C} \supseteq \mathcal{C}'$ sans que $\mathcal{C}' \supseteq \mathcal{C}$.

Parmi les $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ citons les *segments de* $\mathcal{C}$ images par $\mathbf{p}$ des intervalles fermés $[u v]$ de $\mathcal{I}$; deux points sur $\mathcal{C}$, $\mathfrak{p}'$ et $\mathfrak{p}''$ avec

$\mathfrak{p}' \leq \mathfrak{p}''$ définissent sans ambiguïté un segment de $\mathcal{C}$, à savoir l'image de l'intervalle fermé $[\mathfrak{p}'\mathfrak{p}'']$ de $\tilde{\mathcal{C}}$ dans l'application définie sur lui par $p = |\mathfrak{p}|$; nous désignons ce segment par $\mathcal{C}_{\mathfrak{p}'\mathfrak{p}''}$; nous le nommons *segment initial* si $\mathfrak{p}'$ est point initial de $\tilde{\mathcal{C}}$, *segment final* si $\mathfrak{p}''$ est point final de $\tilde{\mathcal{C}}$.

$\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont dits *confinaux* lorsqu'ils admettent tous deux un point initial et un point final coïncidant respectivement.

2. 3. Opérations sur les $\mathcal{C}$. — $\mathcal{I}$ étant un ensemble ordonné, nous désignons par $-\mathcal{I}$ l'ensemble ordonné obtenu en renversant l'ordre des éléments de $\mathcal{I}$; si $\mathcal{C} : \mathfrak{p} (\mathcal{I})$, nous représentons par $-\mathcal{C}$ l'image de $-\mathcal{I}$ par $\mathfrak{p}$ — $\mathcal{C} : \mathfrak{p} (-\mathcal{I})$.

Pour définir la somme $\mathcal{C}'' = \mathcal{C} + \mathcal{C}'$, où $\mathcal{C}' : \mathfrak{p}' (\mathcal{I}')$, nous commençons par choisir pour $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux représentations paramétriques $\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{q}'$ $\mathcal{C} : \mathfrak{q} (\mathcal{I}_0)$, $\mathcal{C}' : \mathfrak{q}' (\mathcal{I}'_0)$ telles que $\mathcal{I}_0$ et $\mathcal{I}'_0$ soient disjoints, puis nous posons $\mathcal{C}'' : \mathfrak{q}'' (\mathcal{I}_0 + \mathcal{I}'_0)$ ⁽⁵⁾ où $\mathfrak{q}''(t) = \mathfrak{q}(t)$ si $t \in \mathcal{I}_0$, $\mathfrak{q}''(t) = \mathfrak{q}'(t)$ si $t \in \mathcal{I}'_0$.

La somme $\mathcal{C}_1 + \dots + \mathcal{C}_n$ de n images d'ensembles ordonnés se définit de proche en proche à partir de la gauche ce qui conduit à

$$\mathcal{C}_1 + \dots + \mathcal{C}_n = (\underbrace{\dots}_{n-2}((\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2) + \mathcal{C}_3) + \dots) + \mathcal{C}_n.$$

Si $\mathcal{C}_1 = \dots = \mathcal{C}_n = \mathcal{C}$ nous écrivons en abrégé $n. \mathcal{C}$ au lieu de $\underbrace{\mathcal{C} + \dots + \mathcal{C}}_n$.

2. 4. Polygones — Un polygone de H est l'image dans H d'un ensemble ordonné fini soit $P : \mathfrak{p} (1, \dots, m)$ et se représente habituellement par $P : (p_1, \dots, p_m)$; $\mathfrak{p}$ est une représentation propre si $m = 1$ ou si, pour $m > 1$, $p_{i+1} \neq p_i$ ($i = 1, \dots, m - 1$).

2. 5. Courbes d'un ensemble. — Une *courbe de l'ensemble* H au sens de M. Menger est l'image dans H d'un intervalle fermé de nombres ordonnés naturellement ⁽⁶⁾, soit $C : \mathfrak{p}([\alpha\beta])$ ou plus

⁽⁵⁾ La somme $\mathcal{I}_0 + \mathcal{I}'_0$ se trouve définie en (30,44).

⁽⁶⁾ Sous une forme plus précise : une courbe d'un ensemble est une image d'ensemble ordonné qui admet une représentation paramétrique définie sur un intervalle fermé de nombres. Ces courbes sans condition de continuité sont les seules dont il puisse être question dans les espaces métriques généraux (Cf.(2)) où la métrique n'induit pas toujours une topologie.

brièvement $C : p[\alpha\beta]$. La représentation p de C est propre lorsque, quel que soit le point a de C , l'ensemble original $[p(\tau) = a]$ est dépourvu de points intérieurs. Remarquons ici avec M. Aronszajn qu'une courbe C de H n'admet pas nécessairement une représentation propre définie sur un intervalle de nombres, ainsi si $H =$ ensemble des nombres, $C : p[-1 + 1]$, où $p(\tau) = \tau$ si $\frac{1}{2} \leq \tau \leq 1$, $p(\tau) = 0$ si $|\tau| < \frac{1}{2}$.

Un polygone $P \subseteq C$ est dit *sous-polygone* de C ; appelons *subdivision* ⁽⁶⁾ de $I = [\alpha\beta]$ l'ensemble ordonné $\{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ de m valeurs de I ($m \geq 1$) vérifiant $\gamma_1 \leq \dots \leq \gamma_m$; tout sous-polygone P de C est l'image par p d'une subdivision Σ de I ; une telle subdivision Σ définit en outre un polygone $P : \tilde{p}(\Sigma)$ dit *sous-polygone* de $\tilde{C}$.

2.6. Suites distinguées de sous-polygones d'une courbe. — Nous appelons *norme d'une subdivision* $\Sigma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ de $I = [\alpha\beta]$ le nombre $\gamma(\Sigma) = \max. (\gamma_{i+1} - \gamma_i)$ pour $i = 1, \dots, m - 1$ si $m > 1$, $= 0$ si $m = 1$; une suite $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n, \dots$ de subdivisions de I est dite *distinguée* lorsque

$$1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(\Sigma_n) = 0,$$

2) γ'_n désignant le premier point de Σ_n et γ''_n le dernier

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma'_n = \alpha \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma''_n = \beta;$$

une suite de subdivisions confinales de I est donc distinguée lorsque la suite de leurs normes converge vers 0 ⁽⁷⁾.

Une suite $P_1, \dots, P_n, \dots$ de sous-polygones d'une courbe $C : p[\alpha\beta]$ de H est dite *distinguée relativement à p* lorsqu'il existe une suite distinguée de subdivisions de $[\alpha\beta]$ $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n, \dots$ telle que $P_n : p(\Sigma_n)$ pour $n = 1, 2, \dots$. De la même façon une suite $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_n, \dots$ de sous-polygones de $\tilde{C}$ est dite *distinguée relativement à p* lorsqu'il existe une suite distinguée de subdivisions de $[\alpha\beta]$ $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n, \dots$ telle que $\mathfrak{P}_n : \tilde{p}(\Sigma_n)$ pour $n = 1, 2, \dots$. Une suite de sous-polygones de C ou de $\tilde{C}$ est dite *distinguée sans plus* lorsqu'elle

⁽⁷⁾ M. Menger (47,1008) entend par subdivision de I une subdivision confinale et par suite distinguée de subdivisions une suite distinguée de subdivisions confinales.

est distinguée relativement à une représentation de C à partir d'un intervalle fermé de nombres.

2.61. *Cas où C admet une représentation propre p_0 définie sur $[\alpha_0\beta_0]$.* — Si C admet une telle représentation p_0 , la suite distinguée relative à p_0 est la suite distinguée la plus générale ; il n'en est plus de même avec une représentation impropre p^* définie sur $[\alpha^*\beta^*]$, car alors a étant un point de C tel que l'ensemble $[p^*(\tau) = a]$ inclue un intervalle $[\xi_1\xi_2]$ avec $\xi_1 < \xi_2$, presque toutes les subdivisions d'une suite distinguée quelconque $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n, \dots$ relative à $[\alpha^*\beta^*]$ pénètrent dans $[\xi_1\xi_2]$ et par conséquent presque tous les polygones $P_1^*, \dots, P_n^*, \dots$ où $P_n^* : p^*(\Sigma_n)$ contiennent a ; or il est clair que cette particularité ne se reproduit plus en choisissant pour C une représentation, par exemple p_0 , dans laquelle l'ensemble original de a n'a pas de points intérieurs.

La propriété pour une suite de sous-polygones d'une courbe d'être distinguée est :

1) *héréditaire* : toute sous-suite d'une suite distinguée est distinguée ;

2) *additive* : une suite obtenue en réunissant deux suites distinguées est distinguée.

3. *Images d'ensembles ordonnés dans un espace distancié.* — Supposons que H soit le support d'un espace distancié $\mathcal{H}$, $\delta(ab)$ désignant la distance de deux de ses points a et b . Nous appelons *diamètre de $\mathcal{C}$* : $p(\mathcal{C})$ la borne supérieure (éventuellement $= \infty$) des distances des deux points de $\mathcal{C}$, soit $\delta(\mathcal{C})$; p_1 et p_2 étant deux points sur $\mathcal{C}$ avec $p_1 \leq p_2$, par *oscillation de $\mathcal{C}$ de p_1 à p_2* , notée $\omega_{\mathcal{C}}(p_1p_2)$, nous entendons le diamètre du segment $\mathcal{C}_{p_1p_2}$ de $\mathcal{C}$. Si $\mathcal{C}' : p'(\mathcal{C}')$, nous définissons $\delta(\mathcal{C}\mathcal{C}')$ comme la borne inférieure des nombres δ , y compris $\delta = +\infty$, tels que pour chacun d'eux, il existe une similitude au sens large S entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ satisfaisant à

$$\mathfrak{R}_{\delta} \left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout couple } (x, x') \text{ d'éléments associés par } S \\ \delta(p(x)p'(x')) \leq \delta. \end{array} \right.$$

x_0 étant un élément de $\mathcal{C}$, y_0 un élément de $\mathcal{C}'$, $p_0 : p(x_0)$, $p'_0 : p'(y_0)$, nous représentons par $\delta(p_0p'_0)$, la borne inférieure des nombres δ , y compris $\delta = +\infty$, tels que pour chacun d'eux il existe une

similitude au sens large S entre $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$, associant x_0 et y'_0 et vérifiant $\mathfrak{R}_\varepsilon$; il est clair que

$$\begin{aligned} \delta(\mathfrak{p}_0 \mathfrak{p}'_0) &\geq \delta(\mathfrak{C} \mathfrak{C}') \\ \text{et si } \mathfrak{C}' = \mathfrak{C} \quad \delta(\mathfrak{p}_0 \mathfrak{p}'_0) &\leq \omega_\infty(\mathfrak{p}_0 \mathfrak{p}'_0). \end{aligned}$$

$\delta(\mathfrak{C} \mathfrak{C}')$ et $\delta(\mathfrak{p} \mathfrak{p}')$ jouissent des propriétés de la « distance » de deux ensembles de $\mathcal{H}$ au sens de Hausdorff (Déf. 30, 146), ainsi : $\delta(\mathfrak{C} \mathfrak{C}')$ est une fonction symétrique, non négative de $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{C}'$, nulle quand $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}'$ et vérifiant l'inégalité triangulaire, mais $\delta(\mathfrak{C} \mathfrak{C}')$ peut être $= \infty$ et $\delta(\mathfrak{C} \mathfrak{C}') = 0$ n'entraîne pas nécessairement $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}'$.

La longueur $\lambda(\mathbf{P})$ d'un polygone $\mathbf{P} : (p_1, \dots, p_m)$ de $\mathcal{H}$ est définie comme $= \delta(p_1 p_2) + \dots + \delta(p_{m-1} p_m)$ si $m > 1$, $= 0$, si $m = 1$, la norme $\nu(\mathbf{P})$ comme $= \max \delta(p_i p_{i+1})$ pour $i = 1, \dots, m - 1$ si $m > 1$, $= 0$ si $m = 1$.

4. Images continues d'ensembles ordonnés dans un espace distancié. — Soit $\mathfrak{C} : \mathbf{p}(\mathcal{G})$ l'image dans $\mathcal{H}$ de l'ensemble ordonné $\mathcal{G}$ par l'application continue $\mathbf{p}$, alors quel que soit le point a de $\mathcal{H}$, l'ensemble $[\mathbf{p}(x) = a]$ est fermé. Supposons désormais $\mathcal{G}$ compact. La correspondance entre a et l'ensemble $[\mathbf{p}(x) = a]$ est semi-continue supérieurement (27, 148-154 ; 56, 565-567) ; appelons $\mathcal{F}$ la famille des ensembles originaux des points de $\mathfrak{C}$ et notons pour x dans $\mathcal{G}$ par $\mathbf{F}(x)$ l'ensemble de $\mathcal{F}$ contenant x : la correspondance entre x et $\mathbf{F}(x)$ est semi-continue supérieurement, ou encore : $\mathcal{F}$ est un système de décomposition de $\mathcal{G}$ semi-continu supérieurement (Déf. 27, 162).

Organisons $\mathcal{F}$ en espace topologique par la convention :

$$\Delta \left\{ \begin{array}{l} \text{si } F_0 \in \mathcal{F}, \text{ les voisinages } \mathfrak{U}(F_0) \text{ de } F_0 \text{ dans } \mathcal{F} \text{ s'obtiennent en prenant} \\ \text{un voisinage quelconque } U(F_0) \text{ de } F_0^{(*)} \text{ dans } \mathcal{G} \text{ et en posant} \\ \mathfrak{U}(F_0) = \text{famille des ensembles de } \mathcal{F} \text{ rencontrant } U(F_0), \end{array} \right.$$

alors : la correspondance entre un point a de $\mathfrak{C}$ et son ensemble original considéré comme élément de $\mathcal{F}$ est une homéomorphie, par conséquent la connaissance de la famille $\mathcal{F}$ suffit, par utilisation de Δ pour étudier les propriétés topologiques de $\mathfrak{C}$.

Mentionnons que : la condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille de sous-ensembles d'un intervalle fermé de nombres $\mathbf{I} = [\alpha\beta]$ soit la famille des ensembles originaux d'une image continue de $\mathbf{I}$ dans un espace distancié est que $\mathcal{F}$ soit un système de décomposition de $\mathbf{I}$ semi-continu supérieurement (Cas particulier de propositions de (30, 162-163)).

(*) Par voisinage $\mathfrak{U}(X)$ d'un ensemble X dans un espace topologique, nous entendons un ensemble auquel tous les points de X sont intérieurs.

4.1. *Courbes d'un espace.* — Nous entendons avec M. Menger (47, 1008) par *courbe de l'espace* $\mathcal{H}$ ⁽⁹⁾ l'image continue $\mathcal{C} : \mathbf{p}[\alpha\beta]$ d'un intervalle fermé de nombres, par longueur $\lambda(\mathcal{C})$ la borne supérieure (éventuellement $= +\infty$) des longueurs des sous-polygones de $\mathcal{C}$; $\mathcal{C}$ est dite *rectifiable* si $\lambda(\mathcal{C})$ est finie.

Considérons une courbe $\mathcal{C}$ de $\mathcal{H}$ rectifiable; à toute valeur λ de l'intervalle $[0 \lambda(\mathcal{C})]$, correspond un point sur $\mathcal{C}$ et un seul

$$\mathbf{p} = \widetilde{\mathbf{p}}(\lambda)$$

tel que la longueur du segment initial de $\mathcal{C}$

$$\mathcal{C}_{\mathbf{p}_0\mathbf{p}} \quad \text{où} \quad \mathbf{p}_0 = \text{point initial de } \widetilde{\mathcal{C}},$$

dite *abscisse curviligne* de $\mathbf{p}$, soit λ . La *représentation de $\mathcal{C}$ au moyen de l'abscisse curviligne* est définie par

$$p = |\widetilde{\mathbf{p}}(\lambda)| \quad \text{pour} \quad 0 \leq \lambda \leq \lambda(\mathcal{C});$$

c'est une représentation propre. La *représentation de $\mathcal{C}$ au moyen de l'abscisse curviligne réduite* est définie par

$$p = |\widetilde{\mathbf{p}}(\sigma \cdot \lambda(\mathcal{C}))| \quad \text{pour} \quad 0 \leq \sigma \leq 1;$$

c'est une représentation propre lorsque $\lambda(\mathcal{C})$ est $\neq 0$, c'est-à-dire lorsque $\mathcal{C}$ n'est pas réduite à un point.

THÉORÈME I. — *Parmi les diverses représentations continues d'une courbe de $\mathcal{H}$ à partir d'un intervalle fermé de nombres, il en existe toujours qui sont propres; citons parmi celles-ci les représentations intrinsèques de Fréchet (19) et de Morse (54).*

$\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}^*$ étant deux courbes de $\mathcal{H}$, $\delta(\mathcal{C}\mathcal{C}^*)$ satisfait à tous les axiomes de la distance; en particulier c'est un nombre fini et

$$(\delta(\mathcal{C}\mathcal{C}^*) = 0) \quad \rightarrow \quad (\mathcal{C} = \mathcal{C}^*);$$

⁽⁹⁾ Ou courbe de Jordan. Elle est à distinguer de la *courbe de la Topologie* qui est le continu de $\mathcal{H}$ compact et de dimension un (44, 80); la courbe du plan en ce sens n'est autre que la *courbe cantorienne*, c'est-à-dire le continu borné plan dépourvu de points intérieurs relativement au plan qui l'inclut (44, 86-95). La courbe de la Topologie est un ensemble alors que la courbe qui est utilisée en Calcul des Variations est un ensemble avec une loi de parcours. Notons que l'ensemble des points d'une courbe $\mathcal{C} : \mathbf{p}[\alpha\beta]$ de $\mathcal{H}$ est un continu de Jordan donc non nécessairement une courbe au sens de la Topologie; c'est le cas pour la courbe de Peano (44, 10-11) dont le support est la surface d'un carré.

de même p représentant un point sur C et p^* un point sur C^* , $\delta(pp^*)$ est une distance ; la classe des points p sur les courbes C de $\mathcal{H}$, est un espace distancié, c'est le « Kurvenpunktraum » de M^{lle} J. von Schwarz (60, 281) ; nous le notons $\mathcal{H}$.

THÉORÈME II. — C_1 et C_2 étant deux courbes de $\mathcal{H}$, δ un nombre $\geq \delta(C_1 C_2)$, il existe toujours une représentation p_1 de C_1 et une représentation p_2 de C_2 définies sur un même intervalle $[\alpha\beta]$, par exemple $[0\ 1]$, et continues, telles que

$$\delta(p_1(\tau)p_2(\tau)) \leq \delta \quad \text{pour} \quad \alpha \leq \tau \leq \beta.$$

Si $\delta > \delta(C_1 C_2)$, p_1 et p_2 peuvent toujours être choisies propres.

Dans ce dernier cas, la correspondance entre $\tilde{p}_1(\tau)$ et $\tilde{p}_2(\tau)$ lorsque τ parcourt $[\alpha\beta]$ est une homéomorphie entre $\tilde{C}_1$ et $\tilde{C}_2$; nous en déduisons que $\delta(C_1 C_2)$ est bien la distance de C_1 et C_2 au sens de M. Fréchet, lequel s'est limité dans sa définition (17, 53) à la considération de représentations continues propres (60, 276) ⁽¹⁰⁾.

THÉORÈME III. — $C_1, \dots, C_n, \dots$ étant une suite de courbes de $\mathcal{H}$ convergeant vers une courbe C_0 , il existe pour chacune d'elles une représentation continue p_i ($i = 0, 1, \dots, n, \dots$) à partir d'un même intervalle fermé $[\alpha\beta]$ avec $\alpha < \beta$ telle que :

1) Si C_i n'est pas réduite à un point, p_i en soit une représentation propre ;

2) les p_n pour $n \rightarrow \infty$ convergent vers p_0 uniformément sur $[\alpha\beta]$.

D'un théorème fondamental de Morse (54, 921) il résulte que nous pouvons toujours choisir comme p_i la représentation de Morse réduite ⁽¹¹⁾ de C_i ; si les courbes C_i sont rectifiables et si

⁽¹⁰⁾ Signalons que dans le cas de surfaces : images continues d'un intervalle fermé du plan (surface d'un rectangle), seules les définitions de l'égalité et de la distance de deux courbes de M. Fréchet ont pu être généralisées (18) ; la notion de similitude au sens large pour les intervalles de la droite n'a pas été étendue aux intervalles des espaces euclidiens (Déf. 27,146) de dimension > 1 .

⁽¹¹⁾ Si r est la représentation de Morse d'une courbe C de $\mathcal{H}$ définie sur l'intervalle $[0\ \mu(C)]$, — $\mu(C)$, μ -longueur de Whitney de C (54,916) — nous appelons représentation réduite correspondante la représentation définie par

$$p = r(\sigma \cdot \mu(C)) \quad 0 \leq \sigma \leq 1.$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(C_n) = \lambda(C_0)$, une représentation $\mathbf{p}_i$ vérifiant les conditions de l'énoncé précédent est la représentation de C_i au moyen de l'abscisse curviligne réduite (66, 96-98).

4.2. Sous-courbes d'une courbe. — Soit C une courbe de $\mathcal{H}$, image de $I = [\alpha\beta]$ par l'application continue $\mathbf{p}$; $\mathcal{G}^*$ étant un sous-ensemble de I , $\mathcal{C}^* : \mathbf{p}(\mathcal{G}^*)$ peut dans certains cas être aussi une courbe de $\mathcal{H}$, par exemple si $\mathcal{G}^*$ est un sous-intervalle de I , $\mathcal{C}^*$ est ce que nous avons appelé en 2.2. un *segment de C* ; de même si $\mathcal{G}^*$ est une réunion de sous-intervalles $[\gamma'_i \gamma''_i]$ de I en nombre fini ≥ 1

$$\mathcal{G}^* = [\gamma'_1 \gamma''_1] + \dots + [\gamma'_m \gamma''_m]$$

tels que $\gamma'_1 \leq \gamma''_1 \leq \gamma'_2 \leq \dots \leq \gamma'_m \leq \gamma''_m$ et

$$\mathbf{p}(\gamma''_j) = \mathbf{p}(\gamma'_{j+1}) \quad \text{pour} \quad j = 1, \dots, m-1, \quad \text{si } m > 1$$

nous disons dans ce cas que $\mathcal{C}^*$ est une *sous-courbe élémentaire de C* ; elle est $= C_1 + \dots + C_m$ où $C_i : \mathbf{p}[\gamma'_i \gamma''_i]$, $i = 1, \dots, m$.

Nous appelons d'une façon générale *sous-courbe de C* une courbe $\mathcal{C}^* \subseteq C$; une représentation paramétrique commode de ces courbes s'obtient ainsi : soit $\mathcal{G}^* \subseteq I$ tel que $\mathcal{C}^* : \mathbf{p}(\mathcal{G}^*)$; formons $I - \mathcal{G}^*$ et décomposons-le en ses composants Γ ; chaque Γ est un intervalle et nous démontrons que si γ' et γ'' sont ses bornes

$$\mathbf{p}(\gamma') = \mathbf{p}(\gamma'').$$

Définissons alors sur I l'application $\mathbf{p}^*$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \text{si } \tau \in \mathcal{G}^* & \quad \mathbf{p}^*(\tau) = \mathbf{p}(\tau) \\ \text{si } \tau \text{ non } \in \mathcal{G}^* & \quad \mathbf{p}^*(\tau) = \mathbf{p}(\gamma') = \mathbf{p}(\gamma''), \end{aligned}$$

γ' et γ'' représentant les bornes de l'intervalle Γ contenant τ .

Désormais

$$\mathcal{C}^* : \mathbf{p}^*[\alpha\beta]$$

Si nous remarquons que les fonctions $\mathbf{p}^*$ correspondant aux diverses sous-courbes de C sont également continues, par application d'une proposition d'Ascoli-Arzelà (19, 289) nous parvenons au :

THÉORÈME IV. — *La famille $\mathcal{C}^*$ des sous-courbes d'une courbe C est compacte en soi ⁽¹²⁾.*

⁽¹²⁾ Ce théorème se déduit aussi aisément de la proposition de M. Fréchet (17,65) relatif à la compacité d'une famille de courbes également divisibles et incluses dans un ensemble compact en soi.

Un segment $\mathcal{B} : p[\alpha'\beta']$ d'une courbe $\mathcal{C} : p[\alpha\beta]$ non réduit à un point et tel que $p(\alpha') = p(\beta')$ est dit une *boucle de $\mathcal{C}$* ; *réduire cette boucle*, c'est substituer à $\mathcal{C}$ la sous-courbe confinale $\mathcal{C}' + \mathcal{C}''$ où $\mathcal{C}' : p[\alpha\alpha']$, $\mathcal{C}'' : p[\beta'\beta]$. La sous-courbe élémentaire de $\mathcal{C}$ la plus générale s'obtient par réduction d'un nombre fini de boucles à partir d'un segment quelconque de $\mathcal{C}$.

THÉORÈME V. — *Toute sous-courbe d'une courbe $\mathcal{C}$ est limite d'une suite de sous-courbes élémentaires de $\mathcal{C}$.*

4.3. — L'arc de l'espace $\mathcal{H}$ est, par définition, l'image continue et biunivoque d'un intervalle de nombres ordonnés naturellement ; il peut être caractérisé comme une courbe jouissant de l'une ou l'autre des deux propriétés équivalentes suivantes :

- 1) elle n'admet pas de boucles,
- 2) elle n'admet pas de sous-courbe confinale distincte d'elle-même.

THÉORÈME VI. — *Toute courbe $\mathcal{C}$ de $\mathcal{H}$ admet comme sous-courbe un arc confinal (cf. Théorème de Kaluszay) (33, 103)).*

Corollaire. Toute courbe $\mathcal{C}$ admet comme sous-courbe un arc ayant comme points initial et final deux quelconques de ses points.

THÉORÈME VII (dû à A. Wald). — *Toute courbe $\mathcal{C}$ de $\mathcal{H}$ est limite d'une suite de ses sous-courbes confinales dont chacune est somme d'un nombre fini d'arcs.*

4.4. Suites distinguées de sous-polygones d'une courbe d'un espace. — Nous avons déjà introduit la notion de suite distinguée de sous-polygones d'une courbe d'un ensemble ; la définition est valable pour une courbe d'un espace distancié, mais nous pouvons lui substituer la suivante qui ne fait pas intervenir une représentation particulière de la courbe : une suite $P_1, \dots, P_n, \dots$ de sous-polygones d'une courbe $\mathcal{C}$ de $\mathcal{H}$ est distinguée lorsque $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(P_n \mathcal{C}) = 0$; cette notion a un caractère topologique. Pour une suite distinguée $P_1, \dots, P_n, \dots$ de sous-polygones de $\mathcal{C}$ nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} (\text{pt init. } P_n) = \text{pt init. } \mathcal{C}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\text{pt fin. } P_n) = \text{pt fin. } \mathcal{C} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} v(P_n) = 0 ; \end{array} \right.$$

l'ensemble de ces propriétés caractérise une suite distinguée lorsque $\mathcal{C}$ est un arc.

Considérons un sous-polygone $\mathfrak{P}$ de $\tilde{\mathcal{C}}$, c'est un polygone de $\tilde{\mathcal{H}}$ (cf. 4.1), ayant dans cet espace une norme $\nu(\mathfrak{P})$; $\tilde{\mathcal{C}}$ peut être interprété comme un arc de $\tilde{\mathcal{H}}$ (60, 282), la condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_n, \dots$ de sous-polygones de $\tilde{\mathcal{C}}$ soit distinguée est que

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} (\text{pt init. } \mathfrak{P}_n) = \text{pt init. } \tilde{\mathcal{C}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\text{pt fin. } \mathfrak{P}_n) = \text{pt fin. } \tilde{\mathcal{C}} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(\mathfrak{P}_n) = 0. \end{array} \right.$$

1. — LONGUEUR GÉNÉRALISÉE. INTÉGRALE DE WEIERSTRASS.

1. Longueur d'une courbe dans un espace métrique général. — Considérons un espace métrique quelconque ⁽²⁾ dont H désigne l'ensemble des points, $\rho(xy)$ l'écart de deux d'entre eux x et y ; par *longueur d'un polygone* $P : (p_1, \dots, p_m)$ de H nous entendons le nombre

$$\lambda(P) = \begin{cases} 0 & \text{si } m = 1, \\ \rho(p_1 p_2) + \dots + \rho(p_{m-1} p_m) & \text{si } m > 1; \end{cases}$$

pour une courbe C de H nous définissons (50, 6-8) la *longueur inférieure* $\underline{\lambda}(C)$ et la *longueur supérieure* $\overline{\lambda}(C)$ comme la borne inférieure et la borne supérieure ⁽¹³⁾ respectivement, des nombres λ jouissant de la propriété suivante : pour chacun d'eux il existe une suite distinguée $P_1, \dots, P_n, \dots$ de sous-polygones de C telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(P_n) = \lambda.$$

L'ensemble de ces λ est fermé, comme conséquence il existe une suite distinguée de sous-polygones de C , $P'_1, \dots, P'_n, \dots$, dite *suite distinguée minimante*, telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{\lambda}(P'_n) = \underline{\lambda}(C)$$

⁽¹³⁾ L'ensemble des nombres est considéré désormais comme complété par $-\infty$ et $+\infty$ (27, 177-180).

et une autre $P_1'', \dots, P_n'', \dots$ dite *suite distinguée maximante* telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(P_n'') = \overline{\lambda}(C).$$

En vertu de définitions de l'égalité ⁽¹⁴⁾ pour les polygones et les courbes

$$\begin{aligned} (P_1 = P_2) &\rightarrow (\lambda(P_1) = \lambda(P_2)) \\ (C_1 = C_2) &\rightarrow (\underline{\lambda}(C_1) = \underline{\lambda}(C_2)) \quad \text{et} \quad (\overline{\lambda}(C_1) = \overline{\lambda}(C_2)) \end{aligned}$$

Une courbe C est dite *rectifiable au sens large* lorsque $\underline{\lambda}(C) = \overline{\lambda}(C)$; la valeur commune $\lambda(C)$ est la *longueur de C* ; C est dite *rectifiable* sans plus lorsque $\lambda(C)$ est finie.

Exemples. — Soit ξ une fonction numérique finie quelconque définie sur un intervalle fermé de nombres $[\alpha\beta]$; elle définit une courbe C de l'ensemble E_1 des nombres; si pour deux points ξ_1 et ξ_2 de E_1 nous posons $\rho(\xi_1\xi_2) = |\xi_2 - \xi_1|$, $\lambda(C)$ existe et = *variation totale de la fonction ξ sur $[\alpha\beta]$* (Déf. 36, 49 et suivantes); dire que C est rectifiable c'est affirmer que ξ est à variation totale finie et inversement. Si maintenant nous posons $\rho(\xi_1\xi_2) = |\xi_2 - \xi_1|^2$, $\lambda(C)$ peut être $\neq \overline{\lambda}(C)$; $\overline{\lambda}(C)$ est suivant M. Denjoy (15', 582) la variation carrée totale de ξ sur $[\alpha\beta]$.

1.1. *Propriétés de la fonctionnelle λ .* — λ jouit de la propriété d'additivité suivante: $P_1, \dots, P_m$ étant une suite finie, $m > 1$, de polygones adjacents, c'est-à-dire tels que

$$\text{pt fin. } P_j = \text{pt init. } P_{j+1} \quad j = 1, \dots, m-1$$

nous avons

$$\lambda(P_1 + \dots + P_m) = \lambda(P_1) + \dots + \lambda(P_m).$$

Un segment d'une courbe rectifiable n'est pas nécessairement rectifiable, comme le montre l'exemple suivant:

$H = [-1 + 1]$ et pour deux valeurs ξ_1 et ξ_2 de H , l'écart

$$\rho(\xi_1\xi_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } (\xi_1 \leq 0) \quad \text{et } (\xi_2 > 0) \\ 0 & \text{si } (\xi_1 > 0) \quad \text{ou } (\xi_2 \leq 0) \end{cases}$$

Prenons comme courbe C l'intervalle $[-1 + 1]$ parcouru de la gauche vers la droite

$$C: p[-1 + 1] \quad \text{où} \quad p(\xi) = \xi \quad \text{pour} \quad -1 \leq \xi \leq +1;$$

⁽¹⁴⁾ C'est ici qu'apparaît l'opportunité (Zweckmässigkeit) de ces définitions.

C est rectifiable, $\lambda(C) = 1$, le segment $C_1 : p[-1\ 0]$ est aussi rectifiable $\lambda(C_1) = 0$, mais $C_2 : p[0\ +1]$ ne l'est pas, $\lambda(C_2) = 0$, $\bar{\lambda}(C_2) = 1$. Nous avons à ce propos la proposition suivante :

THÉORÈME VIII. — *La condition nécessaire et suffisante pour que λ existe sur tout segment d'une courbe rectifiable $C : p[\alpha\beta]$ est que l'écart $\rho(p(\tau')p(\tau''))$ de deux points de C correspondant à un couple de valeurs τ', τ'' de $[\alpha\beta]$ avec $\tau' < \tau''$ tende uniformément vers 0 avec $\tau'' - \tau'$.*

Si cette condition ⁽¹⁴⁾ est vérifiée :

quels que soient γ' et γ'' avec $\alpha \leq \gamma' \leq \gamma'' \leq \beta$, le segment $C\gamma'\gamma'' : p[\gamma'\gamma'']$ est rectifiable ; $\lambda(C\gamma'\gamma'')$ est une fonction continue de γ' et γ'' nulle pour $\gamma' = \gamma''$; $\lambda(C\gamma'\gamma'')$ considérée comme fonction de l'intervalle $[\gamma'\gamma'']$ est additive au sens restreint, c'est-à-dire que pour des intervalles adjacents en nombre fini

$$[\gamma_1\gamma_2], \dots, [\gamma_{m-1}\gamma_m]$$

nous avons

$$\lambda(C_{\gamma_1\gamma_m}) = \lambda(C_{\gamma_1\gamma_2}) + \dots + \lambda(C_{\gamma_{m-1}\gamma_m}).$$

1.2. *Longueur d'une courbe d'un espace distancié ou euclidien.* — Si $\mathcal{H}$ est un espace distancié, $\mathcal{C}$ une courbe de $\mathcal{H}$, $\lambda(\mathcal{C})$ défini comme précédemment existe toujours et est égale à la borne supérieure des longueurs des sous-polygones de $\mathcal{C}$.

Supposons plus particulièrement que $\mathcal{H}$ soit un espace euclidien et désignons pour tout couple ordonné (x, y) de ses points par $\mathfrak{J}_{(x, y)}$ le segment de droite joignant x et y parcouru toujours dans le même sens de x à y ; à tout polygone $P : (p_1, \dots, p_m)$ de $\mathcal{H}$ correspond une courbe appelée *ligne polygonale*.

$$\mathfrak{P}(P) = \begin{cases} \mathfrak{J}_{(p_1, p_1)} & \text{si } m = 1 \\ \mathfrak{J}_{(p_1, p_2)} + \dots + \mathfrak{J}_{(p_{m-1}, p_m)} & \text{si } m > 1; \end{cases}$$

⁽¹⁴⁾ M. Aronszajn propose d'appeler « parfaitement rectifiable » une courbe rectifiable C satisfaisant à cette condition laquelle est intrinsèque. Avec la définition de M. Menger qui assujettit les sous-polygones d'une courbe à être confiniaux, tout segment $C_{\gamma'\gamma''} : p[\gamma'\gamma'']$ d'une courbe rectifiable C : $p[\alpha\beta]$ est rectifiable ; $\lambda(C_{\gamma'\gamma''})$ est une fonction additive de l'intervalle $[\gamma'\gamma'']$ mais non nécessairement continue en γ' et γ'' .

$\mathfrak{I}(\mathbf{P})$ est rectifiable, sa longueur étant $= \lambda(\mathbf{P})$. Si $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n, \dots$ est une suite distinguée de sous-polygones de $\mathcal{C}$, la suite de courbes $\mathfrak{I}(\mathbf{P}_1), \dots, \mathfrak{I}(\mathbf{P}_n), \dots$ converge vers $\mathcal{C}$, la suite de leurs longueurs converge vers $\lambda(\mathcal{C})$. Nous mettons ainsi en évidence l'identité entre la définition de la longueur d'une courbe euclidienne en géométrie élémentaire et la définition basée sur les suites distinguées de sous-polygones (^{14''}).

2. Intégrale de Weierstrass. — Soit $\mathcal{H}$ un espace distancié, $\delta(xy)$ la distance de deux quelconques x, y de ses points ; supposons donnée une fonction finie $\psi(p, q)$ définie sur les couples ordonnés (p, q) de points distincts de $\mathcal{H}$; à l'aide de cette fonction nous pouvons définir un espace métrique $\mathbf{H}(\psi)$, dont les points sont ceux de $\mathcal{H}$ en posant

$$\delta_{(\psi)}(xy) = \psi(x, y) \cdot \delta(xy) \quad \text{si} \quad x \neq y, \quad = 0 \quad \text{si} \quad x = y.$$

La distance δ est appelée *écart primaire*, l'écart $\delta_{(\psi)}$ *écart secondaire* ; ils coïncident lorsque ψ est constamment $= 1$.

Tout polygone de $\mathbf{H}, \mathbf{P} : (p_1, \dots, p_m)$ admet désormais une longueur $\lambda(\mathbf{P}) = \delta(p_1 p_2) + \dots + \delta(p_{m-1} p_m)$ si $m > 1$, $= 0$, si $m = 1$ et une (ψ) -longueur $\lambda_{(\psi)}(\mathbf{P}) = \delta_{(\psi)}(p_1 p_2) + \dots + \delta_{(\psi)}(p_{m-1} p_m)$ si $m > 1$, $= 0$ si $m = 1$. Pour une courbe $\mathcal{C}$ de $\mathcal{H}$ nous désignons par $\lambda(\mathcal{C})$ sa longueur dans $\mathcal{H}$, par $\underline{\lambda}_{(\psi)}(\mathcal{C})$ et $\overline{\lambda}_{(\psi)}(\mathcal{C})$ ses longueurs inférieure et supérieure dans $\mathbf{H}(\psi)$ ou (ψ) -longueurs inférieure et supérieure ; ce sont ces deux nombres que nous nommons respectivement *intégrales (curvilignes)* W (¹⁵) *par défaut et par excès de ψ le long de $\mathcal{C}$* ; ψ porte désormais le nom d'*intégrant*. Lorsque $\underline{\lambda}_{(\psi)}(\mathcal{C}) = \overline{\lambda}_{(\psi)}(\mathcal{C})$, $\mathcal{C}$ est dite (ψ) -rectifiable au sens large, la valeur commune $\lambda_{(\psi)}(\mathcal{C})$ est la (ψ) -longueur de $\mathcal{C}$; elle apparaît comme l'*intégrale (curviligne)* W de ψ le long de $\mathcal{C}$; les sommes définissant les (ψ) -longueurs des sous-polygones $\mathbf{P}_n$ d'une suite distinguée $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n, \dots$ sont appelées *sommes riemanniennes* correspondantes ; quand $\lambda_{(\psi)}(\mathcal{C})$ existe et

(^{14''}) A la notion de suite distinguée de sous-polygones d'une courbe, correspond dans le cas d'une surface (Cf. (¹⁰)) la notion de suite distinguée de triangulations (Cf. 43, 479) : il semble opportun si l'on a en vue pour une surface euclidienne une définition de l'aire, d'imposer à celles-ci avec M. Fréchet une condition de régularité (20, Cf. aussi 32).

(¹⁵) W = abréviation pour : de Weierstrass.

est finie, $\mathcal{C}$ est dite (ψ) -rectifiable sans plus. En vue de comparer l'intégrale de Weierstrass au sens précédent avec l'intégrale de Weierstrass primitive signalée dans l'Introduction, nous en donnons la définition indépendamment des définitions antérieures :

$\psi(p, q)$ étant une fonction finie définie sur les couples ordonnés de points de l'espace distancié $\mathcal{H}$, $\mathcal{C}$ une courbe de $\mathcal{H}$ définie par $p = \mathbf{p}(\tau)$, $\alpha \leq \tau \leq \beta$, le point $\mathbf{p}(\tau)$ ne restant immobile sur aucun vrai sous-intervalle de $[\alpha, \beta]$, nous formons pour toute subdivision $\tau_1, \dots, \tau_m$ de $[\alpha, \beta]$ avec $m > 1$ la

$$\text{somme}_{i=1, \dots, m-1} \psi(\mathbf{p}(\tau_i)\mathbf{p}(\tau_{i+1})) \cdot \delta(\mathbf{p}(\tau_i)\mathbf{p}(\tau_{i+1}))$$

en convenant que $\psi(p, p) = 0$; si lorsque la plus grande des différences $\tau_{i+1} - \tau_i$ tend vers 0 et que $\tau_1 \rightarrow \alpha$, $\tau_m \rightarrow \beta$, cette somme possède une limite finie ou infinie, une telle limite est l'intégrale W de ψ le long de $\mathcal{C}$.

$I = [\alpha, \beta]$ étant un intervalle fermé de nombres, $\alpha \leq \beta$, $\omega(\tau', \tau'')$ une fonction finie définie sur les couples (τ', τ'') de valeurs distinctes de $[\alpha, \beta]$, nous pouvons appliquer les définitions précédentes à ω et à la courbe $\mathcal{J}$ obtenue en parcourant I de la gauche vers la droite ; nous posons

$$\underline{\lambda}_\omega[\alpha, \beta] = \underline{\lambda}_{(\omega)}(\mathcal{J}) \qquad \overline{\lambda}_\omega[\alpha, \beta] = \overline{\lambda}_{(\omega)}(\mathcal{J})$$

et nous appelons ces deux nombres *intégrales (ordinaires)* $W^{(15')}$, par défaut et par excès de ω de α à β ; si elles sont égales, nous représentons par $\lambda_\omega[\alpha, \beta]$ leur valeur commune que nous nommons : *intégrale (ordinaire)* W de ω de α à β .

(15') ou intégrales de Burkill ; c'est en effet M. Burkill qui les a considérées et introduites pour la première fois sous la forme précédente (12, 320) ; cependant le processus de définition étant en somme le même que dans la définition primitive de Weierstrass donnée dans l'introduction, nous préférons au cours de cet ouvrage consacré au Calcul des Variations conserver la dénomination d'intégrales W , bien que, comme déjà dans le cas de la courbe, nous généralisions et transformions la définition de Weierstrass :

1) l'intégrand est ici fonction de deux points et non d'un point et d'une direction ;

2) il n'est soumis à aucune restriction de continuité et dérivabilité.

Sur la situation de l'intégrale de Burkill vis-à-vis des autres intégrales, voir (34, 654-660).

L'intégrale curviligne W se ramène à une intégrale de ce type en posant pour τ' et τ'' distincts sur $[\alpha\beta]$

$$\omega(\tau', \tau'') \cdot |\tau'' - \tau'| = \delta_{(\psi)}(\mathbf{p}(\tau')\mathbf{p}(\tau''))$$

alors :

$$\underline{\lambda}_{(\psi)}(\mathcal{C}) = \underline{\lambda}_{\omega}[\alpha\beta] \quad \bar{\lambda}_{(\psi)}(\mathcal{C}) = \bar{\lambda}_{\omega}[\alpha\beta]$$

2.1. Exemples d'intégrales W . — $\eta(\xi)$ désignant une fonction bornée définie sur l'intervalle de nombres $[\alpha\beta]$, $\alpha < \beta$, considérons les intégrants $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ définis sur les couples (τ', τ'') de valeurs de $[\alpha\beta]$ avec $\tau' < \tau''$ ⁽¹⁶⁾ par

$$\omega_1(\tau', \tau'') = \frac{|\eta(\tau'') - \eta(\tau')|}{\tau'' - \tau'}, \quad \omega_2(\tau', \tau'') = \max_{\tau \in [\tau'\tau'']} \eta(\tau), \quad \omega_3(\tau', \tau'') = \min_{\tau \in [\tau'\tau'']} \eta(\tau);$$

$\lambda_{\omega_1}[\alpha\beta]$, $\lambda_{\omega_2}[\alpha\beta]$, $\lambda_{\omega_3}[\alpha\beta]$ existent et représentent respectivement la variation totale de η sur $[\alpha\beta]$, l'intégrale riemannienne par excès de η de α à β , l'intégrale riemannienne par défaut de η de α à β (Déf. 36, 49 et suivantes, 25 et 33).

ρ étant une fonction finie définie sur $[\alpha\beta]$, posons

$$\omega_4(\tau', \tau'') = \eta(\tau') \cdot (\rho(\tau'') - \rho(\tau'));$$

si η est une fonction continue et ρ une fonction à variation bornée, $\lambda_{\omega_4}[\alpha\beta]$ existe ; c'est l'intégrale de Stieltjes

$$\int_{\alpha}^{\beta} \eta(\tau) \cdot d\rho(\tau) \quad (31, 235).$$

Soient maintenant γ, η_1 et η_2 des fonctions finies continues et monotones d'intervalle de définition $[\alpha\beta]$, φ_1 et φ_2 des fonctions définies sur le même intervalle et vérifiant

$$\begin{aligned} |\varphi_1(\tau'') - \varphi_1(\tau')|^2 &\leq |\gamma(\tau'') - \gamma(\tau')| \cdot |\eta_1(\tau'') - \eta_1(\tau')|, \\ |\varphi_2(\tau'') - \varphi_2(\tau')|^2 &\leq |\gamma(\tau'') - \gamma(\tau')| \cdot |\eta_2(\tau'') - \eta_2(\tau')|; \end{aligned}$$

introduisons les intégrants ω_5 et ω_6 définis ainsi

$$\omega_5(\tau', \tau'') = \frac{(\varphi_1(\tau'') - \varphi_1(\tau'))^2}{\gamma(\tau'') - \gamma(\tau')}, \quad \omega_6(\tau', \tau'') = \frac{(\varphi_1(\tau'') - \varphi_1(\tau')) \cdot (\varphi_2(\tau'') - \varphi_2(\tau'))}{\gamma(\tau'') - \gamma(\tau')};$$

⁽¹⁶⁾ Si nous voulons que $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, soient définis sur tous les couples de valeurs distinctes de $[\alpha\beta]$, il suffit de poser lorsque $\tau'' < \tau'$:

$$\omega_i(\tau', \tau'') = \omega_i(\tau'', \tau') \quad i = 1, 2, 3.$$

alors : $\lambda_{\omega_s}[\alpha\beta]$ et $\lambda_{\omega_s}[\alpha\beta]$ existent et sont respectivement les *intégrales de Hellinger*

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{(d\varphi_1(\tau))^2}{d\gamma(\tau)} \quad \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\varphi_1(\tau) \cdot d\varphi_2(\tau)}{d\gamma(\tau)} \quad (31, 237).$$

2.2. Différences entre l'intégrale W et l'intégrale de Riemann.

— Si nous comparons la définition de l'intégrale W à celle d'une intégrale de Riemann, nous voyons qu'elle est basée sur la considération de sommes analogues, mais elle en diffère en ce que :

1) l'intégrant $\psi(p, q)$ qui y figure est fonction de deux points de $\mathcal{H}$;

2) elle est liée intrinsèquement à C.

Ce dernier point est essentiel car c'est à lui que les fonctionnelles $\underline{\lambda}_{(\psi)}$ et $\overline{\lambda}_{(\psi)}$ doivent d'emblée leur caractère géométrique

2.3. Propriétés de l'intégrale W.

THÉORÈME IX. (Aronszajn, Pauc). — Soit $I = [\alpha\beta]$ un intervalle fermé de nombres avec $\alpha < \beta$, $\omega(\tau', \tau'')$ une fonction BORNÉE définie sur les couples (τ', τ'') de valeurs de $[\alpha\beta]$ avec $\tau' < \tau''$, $[\xi'\xi'']$ un sous-intervalle fermé quelconque de I, $\alpha \leq \xi' \leq \xi'' \leq \beta$.

Posons en tout ξ de $[\alpha\beta]$

$$\left. \begin{aligned} \omega_i(\xi) &= \liminf_{\tau', \tau''} \omega(\tau', \tau'') \\ \omega_s(\xi) &= \limsup_{\tau', \tau''} \omega(\tau', \tau'') \end{aligned} \right\} \text{ pour } \left. \begin{aligned} \tau' \\ \tau'' \end{aligned} \right\} \rightarrow \xi, \quad \tau' \leq \xi \leq \tau''$$

et là où $\omega_i(\xi) = \omega_s(\xi)$, appelons $\omega(\xi)$, la valeur commune ; alors :

1) ω_i et ω_s sont des fonctions mesurables ;

$$\underline{\lambda}_{\omega}[\xi'\xi''] = \int_{\xi'}^{\xi''} \omega_i(\tau) \cdot d\tau \quad \overline{\lambda}_{\omega}[\xi'\xi''] = \int_{\xi'}^{\xi''} \omega_s(\tau) \cdot d\tau$$

les intégrales $\int$ étant entendues au sens de Lebesgue.

2) La condition nécessaire et suffisante pour que $\lambda_{\omega}[\alpha\beta]$ existe est que presque partout sur $[\alpha\beta]$

$$\omega_i(\xi) = \omega_s(\xi) ;$$

si cette condition est vérifiée $\lambda_{\omega}[\xi'\xi'']$ existe et $= \int_{\xi'}^{\xi''} \omega(\tau) \cdot d\tau$.

Posons pour une subdivision de I

$$\Sigma = \{ \tau_1, \dots, \tau_m \}$$

avec $\tau_1 < \tau_m$,

$$\varpi(\Sigma) = \frac{(\delta_{(\omega)}(\tau_1\tau_2) + \dots + \delta_{(\omega)}(\tau_{m-1}\tau_m)) - \delta_{(\omega)}(\tau_1\tau_m)}{\tau_m - \tau_1},$$

puis pour ξ sur $[\alpha\beta]$

$$\varpi_i(\xi) = \liminf \varpi(\Sigma)$$

$$\varpi_s(\xi) = \limsup \varpi(\Sigma)$$

pour les subdivisions Σ encadrant $\xi : \tau_1 \leq \xi \leq \tau_m$ et convergeant vers ξ ; alors

3) si $\lambda_{\omega}[\alpha\beta]$ existe, presque partout sur $[\alpha\beta]$,

$$\varpi_i(\xi) = \varpi_s(\xi) = 0,$$

pour presque toutes les valeurs ξ de $[\alpha\beta]$, l'expression

$$\varpi[\tau'\tau''] = \frac{\lambda_{\omega}[\tau'\tau''] - \delta_{(\omega)}[\tau'\tau'']}{\tau'' - \tau'}$$

tend vers 0 lorsque $\left. \begin{matrix} \tau' \\ \tau'' \end{matrix} \right\} \rightarrow \xi$ avec $\tau' \leq \xi \leq \tau''$. (Cf. 59')

Définition. — Un intégrant $\psi(x, y)$ de l'espace distancié $\mathcal{H}$ est dit borné sur une courbe $\mathcal{C} : \mathbf{p}[\alpha\beta]$ de $\mathcal{H}$ lorsqu'il est borné sur l'ensemble des couples $(\mathbf{p}(\tau'), \mathbf{p}(\tau''))$ avec

$$\alpha \leq \tau' < \tau'' \leq \beta \quad \mathbf{p}(\tau') \neq \mathbf{p}(\tau'').$$

Pour un intégrant ψ borné sur $\mathcal{C}$, les définitions de $\underline{\lambda}_{(\psi)}(\mathcal{C})$ et $\overline{\lambda}_{(\psi)}(\mathcal{C})$ ne sont pas changées, si nous nous limitons à des suites $P_1, \dots, P_n, \dots$ de sous-polygones de $\mathcal{C}$ distinguées relativement à une représentation paramétrique $\mathbf{p}$ fixée, non nécessairement propre, en particulier à des suites distinguées de sous-polygones continaux (cf. (7)) ; aussi dans la définition encadrée de l'intégrale W , il est inutile quand ψ est borné sur $\mathcal{C}$ d'assujettir $\mathbf{p}$ définie sur un intervalle $[\alpha\beta]$ à être propre.

THÉOREME IX' (Burkill (16')). — $\omega(\tau', \tau'')$ étant une fonction finie définie sur les couples (τ', τ'') de valeurs de l'intervalle $[\alpha\beta]$ avec $\tau' < \tau''$, si $\lambda_\omega[\alpha\beta]$ existe et est finie, presque partout sur $[\alpha\beta]$

ou bien $\omega_s(\xi) = +\infty$ $\omega_i(\xi) = -\infty$
ou bien $\omega_s(\xi) = \omega_i(\xi) = \text{nombre fini.}$

THÉOREME X. — L'intégrant $\varphi(x, y)$ étant borné sur la courbe $C : p[\alpha\beta]$ de $\mathcal{H}$ et celle-ci (ψ) -rectifiable, les sous-courbes élémentaires C_e^* de C sont aussi (ψ) -rectifiables et $\lambda_{(\psi)}(C_e^*)$ est une fonction continue de C_e^* .

THÉOREME XI. — C étant une courbe rectifiable de $\mathcal{H}$, de longueur λ_0 , s sa représentation en prenant la longueur d'arc λ comme paramètre, $\psi(x, y)$ un intégrant borné sur C et, pour deux valeurs λ', λ'' distinctes quelconques de $[\alpha\beta]$,

$$\omega(\lambda', \lambda'') = \begin{cases} 0 & \text{si } s(\lambda') = s(\lambda'') \\ \psi(s(\lambda'), s(\lambda'')) & \text{si } s(\lambda') \neq s(\lambda'') \end{cases}$$

alors :

$$\underline{\lambda}_{(\psi)}(C) = \underline{\lambda}_\omega[0, \lambda_0] \quad \overline{\lambda}_{(\psi)}(C) = \overline{\lambda}_\omega[0, \lambda_0].$$

(16') Les dérivées de $\delta_{(\omega)}(\tau'\tau'')$, considéré comme fonction d'intervalle, qui figurent dans l'énoncé de Burkill (12, 327) ne sont pas ω_s et ω_i mais ω_s^* et ω_i^* définis ainsi :

posons pour trois valeurs τ', τ'', ξ de $[\alpha\beta]$ avec $\tau' < \tau''$

$\rho(\tau', \tau''; \xi) = \frac{\tau'' - \tau'}{\text{longueur du plus petit intervalle de centre } \xi \text{ contenant } \tau' \text{ et } \tau''}$;
ce nombre est $\leq \frac{1}{2}$ lorsque $\xi \in [\tau'\tau'']$; disons qu'une suite de couples $(\tau'_1, \tau''_1), \dots, (\tau'_n, \tau''_n), \dots$ converge régulièrement vers ξ lorsque

$$\lim \tau'_n = \xi \quad \lim \tau''_n = \xi \quad \rho(\tau'_n, \tau''_n; \xi) \geq \text{nombre positif fixe } \rho_0;$$

alors

$$\omega_s^*(\xi) = \limsup \omega(\tau', \tau'') \quad \omega_i^*(\xi) = \liminf \omega(\tau', \tau'')$$

pour les suites de couples (τ', τ'') convergeant régulièrement vers ξ .

Nous avons $\omega_s^* \geq \omega_s$, $\omega_i^* \leq \omega_i$. Dans le cas où, $\psi(\tau)$ représentant une fonction finie quelconque définie sur $[\alpha\beta]$,

$$\delta_{(\omega)}(\tau'\tau'') = \psi(\tau'') - \psi(\tau'),$$

le théorème de Burkill constitue la généralisation pour cette fonction des théorèmes classiques de Denjoy sur la répartition des nombres dérivés d'une fonction continue.

Dans le cas où C est (ψ) -rectifiable, toutes les sous-courbes C^* de C sont (ψ) -rectifiables et $\lambda_{(\psi)}(C^*)$ est une fonction continue de C^* .

2.4. L'intégrale W et les applications. — Les fonctionnelles de courbes qui se présentent en géométrie et en mécanique apparaissent comme des intégrales W ; grâce à des hypothèses de dérivabilité sur la courbe et l'intégrant, elles se laissent exprimer en intégrales de Riemann ; ainsi la longueur d'une courbe plane définie par

$$\xi_1 = \xi_1(\tau), \quad \xi_2 = \xi_2(\tau), \quad \alpha \leq \tau \leq \beta$$

est donnée lorsque ξ_1 et ξ_2 admettent des dérivées ξ'_1 et ξ'_2 continues par

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\xi_1'^2(\tau) + \xi_2'^2(\tau)} \cdot d\tau,$$

l'intégrale étant entendue au sens de Riemann.

Sous des hypothèses supplémentaires plus faibles, elles se laissent exprimer en intégrales de Lebesgue ; ainsi si la courbe précédente est rectifiable, ξ_1 et ξ_2 sont dérivables presque partout sur $[\alpha, \beta]$ et peuvent être choisis absolument continues ; la longueur est alors donnée par la même expression, l'intégrale $\int_{\alpha}^{\beta}$ étant entendue au sens de Lebesgue (36, 198-201 ; 66, 182).

Le théorème XI joint au théorème IX₁, montre que pour une courbe d'un espace distancié rectifiable et un intégrant ψ borné sur elle, $\underline{\lambda}_{(\psi)}$ et $\overline{\lambda}_{(\psi)}$ peuvent s'exprimer par des intégrales de Lebesgue, et nous indiquent la fonction à intégrer. Cette réductibilité est fort importante dans les applications géométriques et mécaniques de l'Analyse ; elle permet dans bien des cas d'employer les méthodes du Calcul Intégral pour calculer exactement une intégrale effective (cas littéral). Pourtant, remarquons ici avec M. Menger que s'il s'agit du calcul approximatif d'une intégrale W (cas numérique), la définition même nous indique des approximations de plus en plus précises à savoir les (ψ) -longueurs des sous-polygones d'une suite distinguée.

Dans une étude théorique, il est tout indiqué de revenir à la définition primitive des fonctionnelles des courbes ; l'emploi de l'intégrale W présente les avantages suivants :

1) *Absence d'hypothèses inutiles.* — La définition de l'intégrale W n'impose aucune condition a priori à l'intégrant et à la courbe ; ce n'est par exemple pas le cas de l'intégrale de Lebesgue-Tonelli (66, 219-221) dont nous aurons l'occasion de nous occuper dans le § 4.

2) *Simplicité et transparence des raisonnements à caractère géométrique.*

3) *Caractère intrinsèque de l'intégrale.*

Ce qui précède justifie la dénomination de *méthode directe*, donnée à l'ensemble des procédés d'étude du Calcul des Variations prenant comme base les fonctionnelles λ_φ .

2. EXISTENCE ET SEMI-CONTINUITÉ DE L'INTÉGRALE DE WEIERSTRASS SUR LES COURBES D'UN ESPACE DISTANCIÉ ET D'UN ESPACE EUCLIDIEN.

1. Cas des espaces distanciés. — $\mathcal{H}$ désignera dans tout ce chapitre un espace distancié, H l'ensemble de ses points, $\psi(x, y)$ un intégrant de $\mathcal{H}$. Nous disons que ψ est > 0 , ≥ 0 , borné, ... sur un ensemble $E \subseteq H$ lorsqu'il est respectivement > 0 , ≥ 0 , borné, ... sur l'ensemble des couples de points distincts de E .

THÉORÈME XII. — K représentant un ensemble compact en soi quelconque de $\mathcal{H}$, si ψ est borné et satisfait à

$$\Omega_+ \left\{ \begin{array}{l} \text{pour } K \text{ fixé, quel que soit } \varepsilon > 0, \text{ il existe un } \delta > 0, \text{ tel que} \\ \text{pour tout polygone } P : (p, \dots, q) \text{ de } K \text{ de diamètre } \leq \delta, \\ \lambda_{(\psi)}(P) \text{ soit } \geq \delta_{(\psi)}(pq) - \varepsilon \cdot \lambda(P), \end{array} \right.$$

alors :

$\lambda_{(\psi)}$ est définie et finie sur toute courbe rectifiable de $\mathcal{H}$,

$\lambda_{(\psi)}$ est semi-continue inférieurement sur toute famille de courbes de $\mathcal{H}$ de longueurs uniformément bornées.

Sous l'hypothèse supplémentaire

$$\Omega_+ \left\{ \begin{array}{l} \text{il existe pour tout } K \text{ un couple de nombres positifs } \omega \text{ et } \rho \\ \text{jouissant de la propriété que pour un polygone } P \text{ de } K, \\ \text{fermé et de diamètre } \leq \rho, \text{ d'ailleurs quelconque, } \lambda_{(\psi)}(P) \\ \text{est } \geq \omega \cdot \lambda(P), \end{array} \right.$$

$\lambda_{(\psi)}$ est définie et semi-continue inférieurement sur la famille de toutes les courbes de $\mathcal{H}$; $\lambda_{(\psi)}(C) = +\infty$ dans le cas et seulement dans le cas où $\lambda(C) = +\infty$.

De ce théorème se déduit aisément un CORRÉLATIF par changement de ψ en $-\psi$, remarquant que $\lambda_{(-\psi)} = -\lambda_{(\psi)}$ donc qu'à une propriété de semi-continuité inférieure de $\lambda_{(\psi)}$ correspond une propriété de semi-continuité supérieure de $\lambda_{(-\psi)}$ et inversement ; nous déduisons de leur combinaison le

THÉORÈME XIII. — K représentant un ensemble compact en soi quelconque de $\mathcal{H}$, si ψ est borné sur K et satisfait à

$$\mathcal{L} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour } K \text{ fixé, quel que soit } \varepsilon > 0, \text{ il existe un } \delta > 0, \text{ tel que} \\ \text{pour tout polygone } P : (p, \dots, q) \text{ de } K \text{ de diamètre } \leq \delta, \\ |\lambda_{(\psi)}(P) - \delta_{(\psi)}(pq)| \text{ soit } \leq \varepsilon \cdot \lambda(P), \end{array} \right.$$

alors :

$\lambda_{(\psi)}$ est définie et finie sur toute courbe rectifiable C de $\mathcal{H}$,

$\lambda_{(\psi)}$ est continue sur toute famille de courbes de $\mathcal{H}$ de longueurs uniformément bornées.

Ajoutons que : $\lambda_{(\psi)}(-C) = -\lambda_{(\psi)}(C)$.

1.1. — *Intégrant selon Menger (50, 7-8).* — Nous supposons donnée une application ϖ de l'ensemble des couples ordonnés de points distincts de H dans un ensemble Θ dont la nature n'est pas précisée et nous notons par ϖ_{xy} l'élément de Θ attribué au couple (x, y) appelé encore *direction abstraite de x vers y* .

Un intégrant de $\mathcal{H}$ selon M. Menger est une fonction $\varphi(p; \varpi)$ définie et finie en tout p de H et tout ϖ de Θ ; l'intégrant à notre sens s'en déduit en posant pour $x \neq y$

$$\psi(x, y) = \varphi(x; \varpi_{xy});$$

nous posons en outre

$$\delta_\varphi = \delta_{(\psi)}, \quad H_\varphi = H_{(\psi)}, \quad \underline{\lambda}_\varphi = \underline{\lambda}_{(\psi)}, \quad \overline{\lambda}_\varphi = \overline{\lambda}_{(\psi)}, \quad \lambda_\varphi = \lambda_{(\psi)}.$$

A côté de l'intégrant ψ s'introduit pour p_0 de H fixé, l'intégrant ψ_{p_0} défini par

$$\psi_{p_0}(x, y) = \varphi(p_0; \varpi_{xy});$$

la métrique $\delta_{(\psi_{p_0})} = \delta_{\varphi p_0}$ est la *métrique tangentielle en p_0* , l'espace $H_{(\psi_{p_0})} = H_{\varphi p_0}$ l'espace tangent à H_φ en p_0 ; nous désignons pour un polygone $P : (p_1, \dots, p_m)$ par $\lambda_{\varphi p_0}$ sa longueur dans $H_{\varphi p_0}$, = somme $\delta_{\varphi p_0}(p_i p_{i+1})$ si $m > 1$, = 0 si $m = 1$.

φ est dit en un point p_0 de H
 borné lorsque $\varphi(p_0; \varepsilon)$ en tant que fonction de ε est borné sur Θ ,
 positif, non négatif, nul lorsque $\varphi(p_0; \varepsilon)$ est > 0 , ≥ 0 , $= 0$ quelle
 que soit la direction ε de Θ .

φ est dit, sur un ensemble $E \subseteq H$
 borné lorsque l'ensemble des valeurs prises par $\varphi(p; \varepsilon)$ pour p
 variant sur E et ε sur Θ est borné,
 positif, non négatif, nul lorsque $\varphi(p_0; \varepsilon)$ est > 0 , ≥ 0 , $= 0$ quels
 que soient p_0 sur E et ε dans Θ .

1.2. *Quasi-régularité de Menger* (50, 7-8). — Posons pour trois
 points p, q, r de H

$$\tau(p, q, r) = \delta_{\varphi p}(pq) + \delta_{\varphi p}(qr) - \delta_{\varphi p}(pr);$$

nous disons, suivant *M. Menger*, que φ est au point p_0 de H

<i>quasi-régulier</i> (sous-entendu : positif)	lorsque $\tau(p_0, q, r) \geq 0$	} quels que soient q et r dans H
<i>quasi-régulier négatif</i>	lorsque $\tau(p_0, q, r) \leq 0$	
<i>linéaire</i>	lorsque $\tau(p_0, q, r) = 0$	

puis que φ est *quasi-régulier*, *quasi-régulier négatif*, *linéaire* lorsqu'il l'est respectivement quel que soit p_0 de H .

THÉORÈME XIV. — $\varphi(p; \varepsilon)$ étant un intégrant borné et *quasi-régulier positif ou négatif au sens de Menger* en un point p_0 de H , $\psi(p_0, x)$ et $\delta_{\varphi}(p_0 x)$ sont des fonctions continues de x .

THÉORÈME XV. — $\psi(p; \varepsilon)$ étant un intégrant borné sur tout ensemble compact en soi de $\mathcal{H}$ et continu vis-à-vis de p uniformément par rapport à ε (17) :

(*quasi-régularité mengerienne positive de φ*) $\rightarrow$ ($\mathcal{Q}_+$).

Nous déduisons de ce théorème un corrélatif en changeant φ en $-\varphi$ et en tenant compte de ce que :

(*quasi-régularité + de φ*) $\sim$ (*quasi-régularité — de $(-\varphi)$*);
 en les combinant nous obtenons

(17) C'est-à-dire que : en tout point p de H , quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que x représentant le point courant de H .

$$(\delta(px) \leq \delta) \rightarrow (|\varphi(x; \varepsilon) - \varphi(p; \varepsilon)| \leq \varepsilon \quad \text{quel que soit } \varepsilon).$$

Sous les hypothèses de l'énoncé du Théorème XV

(linéarité mengerienne de φ) $\rightarrow$ (L).

2. Cas des espaces euclidiens. — Supposons désormais que $\mathcal{H}$ soit un sous-espace de l'espace euclidien $\mathcal{E}_n$, ϖ_{xy} représentant pour $x \neq y$ la direction de x vers y au sens habituel, Θ l'ensemble des directions de $\mathcal{E}_n$; nous désignons par $\mathbf{0}$ le vecteur nul de $\mathcal{E}_n$ et pour un vecteur ϱ de $\mathcal{E}_n$ par $|\varrho|$ sa longueur euclidienne et s'il est non nul, par $\varpi(\varrho)$ sa direction. Introduisant un système d'axes dans $\mathcal{E}_n$, pour tout système $\xi_1, \dots, \xi_n$ de n nombres finis, nous notons par $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ le point de $\mathcal{E}_n$ de coordonnées $\xi_1, \dots, \xi_n$ et par $\mathbf{v}(\xi_1, \dots, \xi_n)$ le vecteur de $\mathcal{E}_n$ de composantes $\xi_1, \dots, \xi_n$ et nous adjoignons à un intégrant $\varphi(x; \varpi)$ l'intégrant au sens classique $\varphi(\xi_1, \dots, \xi_n, \xi'_1, \dots, \xi'_n)$ défini pour les points $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ de H et les vecteurs $x' = \mathbf{v}(\xi'_1, \dots, \xi'_n)$ de $\mathcal{E}_n$ par

$$\varphi(\xi_1, \dots, \xi_n, \xi'_1, \dots, \xi'_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } x' = \mathbf{0} \\ \varphi(x; \varpi(x')) \cdot |x'| & \text{si } x' \neq \mathbf{0}. \end{cases}$$

Cet intégrant est une fonction positivement homogène (sous-entendu : du premier degré) en $\xi'_1, \dots, \xi'_n$ (Déf. 7, 194). Si inversement nous avons un intégrant classique $\varphi(\xi_1, \dots, \xi_n, \xi'_1, \dots, \xi'_n)$, c'est-à-dire une fonction définie et finie pour $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ dans H et $x' = \mathbf{v}(\xi'_1, \dots, \xi'_n)$ vecteur quelconque de $\mathcal{E}_n$, positivement homogène en $\xi'_1, \dots, \xi'_n$, nous en déduirons aussitôt un intégrant $\varphi(x; \varpi)$ en posant

$$\varphi(x; \varpi) = \varphi(\xi_1, \dots, \xi_n, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$$

où $\xi_1, \dots, \xi_n$ sont les coordonnées de x , $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ les composantes du vecteur unitaire de direction ϖ donc encore les cosinus directeurs de ϖ si les axes de coordonnées sont rectangulaires.

Pour deux points de H $x_1 = (\xi_1^{(1)}, \dots, \xi_n^{(1)})$ $x_2 = (\xi_1^{(2)}, \dots, \xi_n^{(2)})$

$$\delta_\varphi(x_1 x_2) = \varphi(\xi_1^{(1)}, \dots, \xi_n^{(1)}, \xi_1^{(2)} - \xi_1^{(1)}, \dots, \xi_n^{(2)} - \xi_n^{(1)}),$$

aussi MM. Fréchet (20, 211-212) et Bouligand (10, 32) représentent-ils l'intégrale de Weierstrass de φ le long d'une courbe $\mathcal{C}$ de $\mathcal{H}$ par

$$\int_{\mathcal{C}} \varphi(\xi_1, \dots, \xi_n, d\xi_1, \dots, d\xi_n)$$

ou en faisant usage de la notation abrégée $\varphi(x, x')$ pour l'intégrant classique par

$$\int_C \varphi(x, dx).$$

Remarquons que $x_0 = (\xi_1^{(0)}, \dots, \xi_n^{(0)})$ désignant un point de H , la définition de l'écart $\delta_{\varphi x_0}(yz)$ est valable pour deux points $y = (\eta_1, \dots, \eta_n)$, $z = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ quelconques de $\mathcal{E}_n$:

$$\delta_{\varphi x_0}(yz) = \varphi(\xi_1^{(0)}, \dots, \xi_1^{(0)}, \zeta_1 - \eta_1, \dots, \zeta_n - \eta_n)$$

2.1. Quasi-régularité et convexité de l'intégrant. — En un point p intérieur à H considéré comme ensemble de $\mathcal{E}_n$, la quasi-régularité mengerienne de $\varphi(x; \mathfrak{s})$ équivaut à

$$\mathcal{C}_+ \left\{ \begin{array}{l} \text{quels que soient les points } x, y, z \text{ de } \mathcal{E}_n : \\ \delta_{\varphi p}(xy) + \delta_{\varphi p}(yz) \geq \delta_{\varphi p}(xz); \end{array} \right.$$

elle se traduit pour l'intégrant $\varphi(x, x')$ par la propriété suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{quels que soient les vecteurs } x'_1 \text{ et } x'_2 \text{ de } \mathcal{E}_n \\ \varphi(p, x'_1 + x'_2) \leq \varphi(p, x'_1) + \varphi(p, x'_2); \end{array} \right.$$

ou encore, si nous tenons compte de la positive homogénéité de $\varphi(x, x')$ par rapport à x' , par la propriété

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{quels que soient les vecteurs } x'_1 \text{ et } x'_2 \text{ de } \mathcal{E}_n \text{ et un nombre} \\ \tau \text{ arbitraire avec } 0 \leq \tau \leq 1 \\ \varphi(p, (1 - \tau)x'_1 + \tau x'_2) \leq (1 - \tau) \cdot \varphi(p, x'_1) + \tau \cdot \varphi(p, x'_2) \end{array} \right.$$

qui exprime que $\varphi(p, x')$ est une *fonction convexe* (sous-entendu positivement) de x' (Déf. 8, 18).

Corrélativement en un point p intérieur à H , la quasi-régularité négative suivant Menger, se traduit par la propriété

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{quels que soient les vecteurs } x'_1 \text{ et } x'_2 \text{ de } \mathcal{E}_n \text{ et un nombre} \\ \tau \text{ arbitraire avec } 0 \leq \tau \leq 1 \\ \varphi(p, (1 - \tau)x'_1 + \tau x'_2) \geq (1 - \tau) \cdot \varphi(p, x'_1) + \tau \cdot \varphi(p, x'_2) \end{array} \right.$$

qui exprime que $\varphi(p, x')$ est une *fonction convexe négativement* ou concave de x' (Déf. 8, 18).

La linéarité mengerienne de $\varphi(x; \mathfrak{s})$ en un point p intérieur à H équivaut à la linéarité de $\varphi(p, \xi'_1, \dots, \xi'_n)$ vis-à-vis de $\xi'_1, \dots, \xi'_n$.

Nous convenons de dire que l'intégrant φ est *quasi-régulier*

(quasi-régulier négatif, linéaire) en un point p de H lorsque $\varphi(p, x')$ est une fonction convexe (concave, linéaire) de $\xi'_1, \dots, \xi'_n$, puis que φ est *quasi-régulier* (quasi-régulier négatif, linéaire) lorsqu'il l'est au sens précédent en tout point de H ; nous verrons au § 3 que, dans le cas $n = 2$, lorsque φ satisfait aux hypothèses de dérivabilité de Tonelli (66, 203), ces définitions de *quasi-régularité* concordent avec celles de Tonelli (66, 224). Remarquons qu'en un point p non intérieur à H , la convexité (négative) de $\varphi(p, x')$ par rapport à x' implique la quasi-régularité mengerienne (négative) de $\varphi(x; \varepsilon)$ en ce point ; l'inverse n'a pas nécessairement lieu. Mentionnons enfin qu'une fonction convexe positivement ou négativement est une fonction continue (8, 19) par conséquent la quasi-régularité $+$ ou $-$ de $\varphi(x; \varepsilon)$ au point p entraîne la continuité de $\varphi(p; \varepsilon)$ par rapport à ε .

2.2. Fonction χ de Menger. Directions de linéarité d'un intégrant quasi-régulier. — M. Menger a introduit (50, 3 et 26) une fonction χ définie à partir de l'intégrant $\varphi(x; \varepsilon)$ en chaque point p de H par

$$\chi(p) = \min_{\varepsilon} (\varphi(p; \varepsilon) + \varphi(p; -\varepsilon)) \quad (-\varepsilon = \text{direction opposée à } \varepsilon).$$

Si φ est quasi-régulier au point p , $\chi(p)$ est ≥ 0 ; la nullité de $\chi(p)$ équivaut à l'existence d'une direction ε^* telle que

$$\varphi(p; \varepsilon^*) + \varphi(p; -\varepsilon^*) = 0 ;$$

une direction de droite Δ^* telle que les deux directions ε^* et $-\varepsilon^*$ qui lui sont parallèles vérifient la relation précédente est appelée une *direction de linéarité de φ en p* ; les directions de linéarité de l'intégrant φ quasi-régulier en p constituent une variété linéaire (8, 20) ; nous désignons par $n_{\varphi}(p)$ le nombre maximum de directions de linéarité de φ en p linéairement indépendantes ; la positivité de χ en p équivaut donc à $n_{\varphi}(p) = 0$; la linéarité de φ au point p équivaut à $n_{\varphi}(p) = n$; dans le cas où $\varphi(\xi_1, \dots, \xi_n, \xi'_1, \dots, \xi'_n)$ admet pour $(\xi_1, \dots, \xi_n) = p$ et $(\xi'_1, \dots, \xi'_n) \neq (0, \dots, 0)$ des dérivées premières en $\xi'_1, \dots, \xi'_n$, $n_{\varphi}(p)$ ne peut prendre que les valeurs 0 ou n ; par conséquent, ou bien $\chi(p)$ est > 0 ou bien $\chi(p) = 0$, φ est linéaire au point p ; si donc en outre φ est ≥ 0 au point p , $\chi(p)$ ne peut être $= 0$, que si $\varphi(p; \varepsilon)$ est identiquement nul en ε (48, 1649).

Nous appelons *points exceptionnels d'un intégrant φ quasi-régulier* les points p où $\chi(p) = 0$; dans le cas d'un intégrant $\varphi(\xi_1, \dots, \xi_n, \xi'_1, \dots, \xi'_n)$ dérivable en $\xi'_1, \dots, \xi'_n$ pour $(\xi'_1, \dots, \xi'_n) \neq (0, \dots, 0)$ en vertu de la remarque précédente, les points exceptionnels sont les points p où $\varphi(p, \xi'_1, \dots, \xi'_n)$ est linéaire en $\xi'_1, \dots, \xi'_n$; par conséquent, notre définition est d'accord avec celle de Tonelli (66, 272).

Du point de vue de notre étude, l'importance de la fonction χ , résulte de la proposition suivante due à Menger (50, 26).

THÉORÈME XVI. — *L'intégrant $\varphi(x; \varepsilon)$ étant supposé en tous les points p de son domaine de définition H continu en x uniformément par rapport à ε et quasi-régulier, la fonction χ est continue et pour tout ensemble $K \subseteq H$ compact en soi sur lequel χ est > 0 , il existe deux nombres positifs ω et ρ tels que, quel que soit le polygone P de K fermé de diamètre $\leq \rho$, $\lambda_\varphi(P)$ soit $\geq \omega \cdot \lambda(P)$ ⁽¹⁸⁾.*

Tout ce que nous avons dit dans cet alinéa admet une traduction en changeant φ en $-\varphi$, par l'introduction de la fonction corrélatrice de χ

$$\chi^-(p) = \max_{\varepsilon} (\varphi(p; \varepsilon) + \varphi(p; -\varepsilon)).$$

2.3. Régularité et stricte convexité de l'intégrant. — Nous disons que l'intégrant $\varphi(x; \varepsilon)$ est *régulier* (sous-entendu : positif) au point p de H lorsque

$$\mathcal{C}_+^{\text{strict}} \left\{ \begin{array}{l} \text{quels que soient les points distincts } x, y, z \text{ de } \mathcal{E}_n \text{ tels que} \\ y \text{ ne soit pas situé entre } x \text{ et } z \\ \delta_{\varphi p}(xy) + \delta_{\varphi p}(yz) > \delta_{\varphi p}(xz); \end{array} \right.$$

la régularité de $\varphi(x; \varepsilon)$ en p se traduit pour l'intégrant $\varphi(x, x')$ par la propriété

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{quels que soient les vecteurs } x'_1 \neq 0 \text{ et } x'_2 \neq 0 \text{ de } \mathcal{E}_n \text{ avec} \\ \varepsilon(x'_1) \neq \varepsilon(x'_2) \end{array} \right. \quad \varphi(p, x'_1 + x'_2) < \varphi(p, x'_1) + \varphi(p, x'_2)$$

⁽¹⁸⁾ Cette propriété tient au fait que l'extensibilité (Streckbarkeit) $\rho(n)$ de l'espace euclidien $\mathcal{E}_n$ est > 0 ; pour la définition et la détermination de ce nombre se reporter à 41. L'extensibilité de l'espace de Hilbert est nulle; aussi, bien que la définition de la fonction soit valable dans un tel espace, ne rend-elle pas les mêmes services que dans $\mathcal{E}_n$.

que nous nommons *propriété de stricte convexité en x'* de la fonction $\varphi(p, x')$.

Si $\varphi(x; \varepsilon)$ est régulier au point p , il y est quasi-régulier; en outre, il ne présente pas de directions de linéarité.

Signalons dès maintenant que, dans le cas $n = 2$, lorsque φ satisfait aux hypothèses de dérivabilité de Tonelli, la notion de régularité qui vient d'être définie ne coïncide pas avec la notion de régularité de Tonelli (66, 224), mais avec celle de quasi-régularité normale (66, 224); nous reparlerons de cette équivalence dans les § 3 et 4.

La *régularité négative* de l'intégrant $\varphi(x; \varepsilon)$ en un point p de H se définit corrélativement à la régularité positive.

2.4. Théorèmes fondamentaux d'existence et de semi-continuité pour λ_φ sur une famille de courbes. — Sous l'hypothèse que $\varphi(x; \varepsilon)$ est en tout point p de son champ de définition H continu vis-à-vis de x uniformément par rapport à ε :

≧ XVII (Menger). — (Quasi-régularité de φ) $\rightarrow$ (φ -rectificabilité des courbes rectifiables de $\mathcal{H}$ et semi-continuité inférieure de λ_φ sur toute famille de courbes de $\mathcal{H}$ de longueurs uniformément bornées).

Signalons que M. Alt (2, 34) a donné un exemple d'un intégrant φ continu, quasi-régulier et d'une courbe non rectifiable pour laquelle λ_φ n'existe pas; en voici un autre particulièrement simple :

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, \xi'_1, \xi'_2) = \xi_2 \cdot \xi'_2$$

$$\mathcal{C} : \mathbf{p}[-\sqrt{2} \ 0] \quad \text{où} \quad \mathbf{p}(\tau) = \left(\tau, \tau^2 \cos \frac{2\pi}{\tau^4} \right) \quad \text{si} \quad -\sqrt{2} \leq \tau < 0, \\ \mathbf{p}(0) = (0, 0);$$

alors

$$\lambda_\varphi(\mathcal{C}) = -\infty \quad \bar{\lambda}_\varphi(\mathcal{C}) = +\infty \quad (18')$$

Plus généralement, $\mathcal{C}$ étant une courbe de l'espace euclidien $\mathcal{E}_n$ non rectifiable, nous avons montré qu'il existe toujours un intégrant φ de champ $\mathcal{E}_n$ continu et quasi-régulier tel que $\lambda_\varphi(\mathcal{C}) \neq \bar{\lambda}_\varphi(\mathcal{C})$.

(18') Mentionnons ici qu'en vertu d'un théorème de M. Denjoy (15', 583), toute courbe $\mathcal{C}$ de $\mathcal{E}_2$ de longueur quadratique (longueur correspondant à l'écart $\delta^2(xy)$) nulle est φ -rectifiable.

L'exemple de M. Tonelli en (66, 241-242) peut nous servir (se reporter au Th. XXX) pour nous rendre compte que la fonctionnelle λ_φ correspondant à un intégrant φ continu et quasi-régulier n'est pas nécessairement semi-continue inférieurement sur une famille de courbes rectifiables, dont les longueurs ne sont pas uniformément bornées.

《 XVIII (Menger). — (Quasi-régularité de φ et positivité de χ) $\rightarrow$ (existence et semi-continuité inférieure de λ_φ sur toutes les courbes de $\mathcal{H}$; $\lambda_\varphi(C) = +\infty$ dans le cas et seulement dans le cas où $\lambda(C) = +\infty$).

Notons ici que :

(régularité de φ) $\rightarrow$ (quasi-régularité de φ et positivité de χ),
(quasi-régularité et positivité de φ) $\rightarrow$ (positivité de χ).

《 XIX. — (Quasi-régularité de φ et en tout point exceptionnel p^* : nullité de φ et existence d'un voisinage de p^* dans H sur lequel φ est ≥ 0) $\rightarrow$ (semi-continuité inférieure de λ_φ sur toutes les courbes rectifiables de $\mathcal{H}$).

《 XX. (Aronszajn). — (Quasi-régularité de φ , nullité de la mesure linéaire ⁽¹⁹⁾ de l'ensemble des points exceptionnels appartenant à une courbe rectifiable quelconque de $\mathcal{H}$ ⁽²⁰⁾ et non négativité de φ sur un voisinage de tout point exceptionnel) $\rightarrow$ (semi-continuité inférieure de λ_φ sur toute courbe rectifiable de $\mathcal{H}$).

《 XXI. — (Quasi-régularité de φ et existence en tout point exceptionnel p^* intérieur à H ⁽²¹⁾ d'un voisinage de p^* inclus dans H tel que la φ -longueur de toute courbe fermée rectifiable située sur lui soit ≥ 0) $\rightarrow$ (semi-continuité inférieure de λ_φ sur toutes les courbes rectifiables intérieures ⁽²²⁾ à H).

⁽¹⁹⁾ La mesure linéaire (au sens de Lebesgue-Caratheodory) d'un ensemble E d'un espace distancié $\mathcal{H}$ est la borne inférieure des nombres μ tels que pour chacun d'eux il existe une famille de sphères en nombre fini ou en infinité dénombrable, recouvrant E et dont la somme des diamètres soit $= \mu$.

⁽²⁰⁾ Cette hypothèse ainsi qu'il résulte d'un exemple de M. Novak dans le cahier 8 des Erg. eines math. Koll, p. 35, est plus faible que la suivante : l'ensemble des points exceptionnels de ρ est de mesure linéaire nulle.

⁽²¹⁾ H étant considéré comme sous-ensemble de l'espace euclidien $\mathcal{E}_n$.

⁽²²⁾ intérieure signifiant : dont tous les points sont intérieurs à H .

Des théorèmes XVII-XXI se déduisent aisément des corrélatifs par changement de φ en $-\varphi$.

Nous nous occuperons dans le § 4 de la liaison entre la théorie que nous développons et celle de Tonelli ; nous ferons alors voir à quel titre les théorèmes XVII, XVIII, XIX, et XXI constituent une généralisation de théorèmes de Tonelli, 66, 261-287 et 292-294.

3. INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE ET DIFFÉRENTIELLE DANS LES ESPACES EUCLIDIENS DES PROPRIÉTÉS D'UN INTÉGRANT EN UN POINT.

1. Interprétation géométrique des propriétés de l'intégrant φ en un point au moyen de la figurative.

1. 1. *Espaces de Minkowski généralisés.* — Une métrique μ qui à tout vecteur ν d'un espace vectoriel fait correspondre un nombre fini $\mu(\nu)$ est une *métrique radiale* (Strahlenmetrik de Minkowski) lorsque

quel que soit le vecteur ν de l'espace et le nombre positif λ

$$\mu(\lambda \cdot \nu) = \lambda \cdot \mu(\nu);$$

cette relation implique que pour le vecteur nul $\mathbf{0}$

$$\mu(\mathbf{0}) = 0;$$

si pour $\nu \neq \mathbf{0}$, $\mu(\nu)$ est > 0 , la métrique μ est dite positive.

Si l'espace vectoriel est l'espace des vecteurs de E_n , l'espace métrique dont l'ensemble des points est l'ensemble E_n des points de E_n et où l'écart de deux d'entre eux x_1 et x_2 est

$$\zeta(x_1 x_2) = \overrightarrow{(x_1 x_2)},$$

$\overrightarrow{x_1 x_2}$ représentant le vecteur d'origine x_1 et d'extrémité x_2 , est appelé un *espace de Minkowski* — et ζ une métrique de Minkowski, — si μ est une métrique radiale positive, un *espace de Minkowski généralisé* — et ζ une métrique de Minkowski généralisée, — si μ est une métrique radiale de signe quelconque.

Une métrique de Minkowski généralisée ζ est donc, parmi les métriques de E_n , caractérisée par la propriété suivante :

Quels que soient les points x_1, x_2, y_1, y_2 de E_n et le nombre positif λ

$$\overrightarrow{(y_1 y_2)} = \lambda \cdot \overrightarrow{(x_1 x_2)} \rightarrow (\zeta(y_1 y_2) = \lambda \cdot \zeta(x_1 x_2));$$

dans une telle métrique, pour deux points quelconques x et y distincts de E_n , le rapport

$$\frac{\zeta(xy)}{\delta(xy)} \quad (\delta(xy) = \text{distance euclidienne de } x \text{ à } y)$$

ne dépend que de la direction $\varepsilon = \varepsilon_{xy}$; il porte le nom de *coefficient de l'écart* (Abstandskoeffizient) relatif à la direction ε ; nous le notons $\gamma(\varepsilon)$. La métrique ζ est bien déterminée lorsqu'on connaît ce coefficient pour toutes les directions ε de E_n .

1.11. Définitions relatives aux cônes. — Un ensemble K de l'espace euclidien E_{n+1} est appelé un *cône* (8, 3) lorsqu'il existe dans E_{n+1} un point s dit son *sommet* tel que :

- 1) K contienne s et au moins un point distinct de s ;
- 2) quel que soit y dans K distinct de s , tous les points de la demi-droite (ou rayon) d'origine s et portant y appartiennent à K .

Un rayon issu de s et inclus dans K est dit une *génératrice* de K ; si K est $\neq E_{n+1}$, la frontière de K dans E_{n+1} , est un cône dont les génératrices sont appelées *rayons frontières* de K (sous-entendu : dans E_{n+1}) ; les génératrices de K non frontières sont dites *génératrices intérieures* (sous-entendu : vis-à-vis de E_{n+1}) de K ; leur réunion = intérieur de K vis-à-vis de E_{n+1} complété par le point s ; nous nommons enfin *rayons extérieurs* à K les rayons issus de s qui ne sont ni génératrices intérieures ni rayons frontières de K .

1.12. Surface conique d'étalonnage d'une métrique de Minkowski généralisée. — Les propriétés d'une métrique de Minkowski généralisée ζ de E_n se traduisent géométriquement au moyen de la *surface* ⁽²³⁾ *conique d'étalonnage* S_ζ ⁽²⁴⁾ définie ainsi :

⁽²³⁾ Dans le cas où ζ n'est pas continue, il serait plus exact de dire « ensemble conique d'étalonnage » de même que pour une fonction discontinue, il serait préférable de parler de « l'ensemble représentatif » plutôt que de « la courbe représentative ». Nous nous conformons ici à l'usage.

⁽²⁴⁾ Minkowski dans le cas d'une métrique ζ positive, se sert de la surface d'étalonnage (Eichfläche) définie à partir d'un point fixe a de E_n comme le lieu des points x de E_n tels que $\zeta(ax) = 1$; dans le cas d'une métrique de Minkowski généralisée, M. Menger définit cette surface ainsi : pour chaque direction ε de E_n , soit A_ε l'axe (droite orientée) d'origine a et de direction positive ε et e_ε le point de A_ε d'abscisse $\frac{1}{\gamma(\varepsilon)}$ si $\gamma(\varepsilon) \neq 0$, le point à l'infini de

nous introduisons dans un espace euclidien $\mathcal{E}_{n+1} \supset \mathcal{E}_n$, un système d'axes de coordonnées dont les n premiers sont dans $\mathcal{E}_n$; a désignant leur origine, ξ_{n+1} la coordonnée relative à l'axe non situé dans $\mathcal{E}_n$, x un point quelconque de $\mathcal{E}_n$, l'équation de S_ζ est $\xi_{n+1} = \zeta(ax)$.

S_ζ est un cône de sommet a ; sa donnée entraîne celle de la métrique ζ .

Nous introduisons en outre le *cône positif d'étalonnage*

$$C_\zeta^+ \quad \xi_{n+1} \geq \zeta(ax)$$

et le *cône négatif d'étalonnage*

$$C_\zeta^- \quad \xi_{n+1} \leq \zeta(ax).$$

Comme exemples simples de traduction d'une propriété de ζ au moyen de S_ζ , C_ζ^+ , C_ζ^- indiquons les suivantes :

(C_ζ^+ est fermé) $\sim$ ($\zeta(ax)$ est une fonction de x semi-continue inférieurement),

(C_ζ^- est fermé) $\sim$ ($\zeta(ax)$ est une fonction de x semi-continue supérieurement),

(S_ζ est fermée) $\sim$ ($\zeta(ax)$ est une fonction continue de x),

(S_ζ est la frontière de C_ζ^+ dans $\mathcal{E}_{n+1}$) $\sim$ (S_ζ est la frontière de C_ζ^- dans $\mathcal{E}_{n+1}$) $\sim$ ($\zeta(ax)$ est une fonction continue de x).

1.2. Figurative d'un intégrant en un point. — ($\xi_1, \dots, \xi_n, \xi_1', \dots, \xi_n'$) étant un intégrant classique de champ $H \subseteq E_n$, $p_0 = (\xi_1^{(0)}, \dots, \xi_n^{(0)})$ un point de H , l'espace $(E_n)_{\varphi p_0}$ dont les points sont ceux de $\mathcal{E}_n$ et où l'écart de deux d'entre eux $x_1 = (\xi_1^{(1)}, \dots, \xi_n^{(1)})$, $x_2 = (\xi_1^{(2)}, \dots, \xi_n^{(2)})$ est

$$\delta_{\varphi p_0}(x_1 x_2) = \varphi(\xi_1^{(0)}, \dots, \xi_n^{(0)}, \xi_1^{(2)} - \xi_1^{(1)}, \dots, \xi_n^{(2)} - \xi_n^{(1)}) = \varphi(p, \overrightarrow{x_1 x_2})$$

est un espace de Minkowski généralisé; sa surface conique d'étalonnage $S_{\varphi p_0}$ relative à p_0 dont l'équation est

$$\xi_{n+1} = \varphi(\xi_1^{(0)}, \dots, \xi_n^{(0)}, \xi_1 - \xi_1^{(0)}, \dots, \xi_n - \xi_n^{(0)})$$

cet axe si $\gamma(\varpi) = 0$; la surface d'étalonnage de ζ relative à a est l'ensemble des points e_ϖ pour les diverses directions ϖ de $\mathcal{E}_n$; c'est donc un sous-ensemble de l'espace projectif $\mathcal{P}_n$ obtenu en complétant $\mathcal{E}_n$ par ses points à l'infini. Cette définition a l'avantage de ne pas faire appel à un espace de dimension $> n$; par ailleurs le maniement de la surface d'étalonnage (Cf. 1, 3, 58) est plus délicat que celui du cône d'étalonnage, ce qui est lié en particulier au fait que sa donnée ne détermine pas la métrique ζ .

est la *figurative* de φ en p_0 de M. Hadamard (26, 90) ; ε étant une direction quelconque de $\mathcal{E}_n$ nous désignons par $R_{p_0\varepsilon}$ le rayon d'origine p_0 et de direction ε et par $T_{p_0\varepsilon}$ la génératrice de $S_{\varphi p_0}$ qui se projette sur $\mathcal{E}_n$ parallèlement à l'axe des ξ_{n+1} suivant $R_{p_0\varepsilon}$; nous représentons par $R_{p_0}^+$ le rayon d'origine p_0 ayant comme direction la direction positive de l'axe des ξ_{n+1} , par $R_{p_0}^-$ le rayon opposé.

Une propriété de quasi-régularité de φ en p_0 est une propriété de convexité de la fonction $\varphi(p_0, x')$ par rapport à x' ; elle se traduit donc aussitôt par une propriété de convexité de la surface représentative de cette fonction, c'est-à-dire $S_{\varphi p_0}$; pour préciser nous allons introduire quelques

1.21. Définitions relatives aux cônes convexes. — Rappelons qu'un ensemble d'un espace euclidien $\mathcal{E}_{n+1}$ est dit *convexe* (8, 2) lorsque, pour deux quelconques de ses points il inclut le segment fermé les joignant.

Nous nommons un cône fermé :

proprement convexe ⁽²⁵⁾ s'il est convexe et n'inclut aucune droite, ou, ce qui équivaut : s'il est convexe et n'inclut pas deux génératrices opposées,

strictement convexe ⁽²⁶⁾ si tout point intérieur au segment joignant deux de ses points non alignés avec le sommet lui est intérieur.

Notons que la convexité stricte implique la convexité propre lorsque le cône est $\neq \mathcal{E}_{n+1}$.

Par *surface conique* de $\mathcal{E}_{n+1}$ *convexe*, *proprement convexe*, *strictement convexe*, nous entendons la frontière d'un cône fermé $\subset \mathcal{E}_{n+1}$ respectivement convexe, proprement convexe, strictement convexe ; par *rayons intérieurs* (*extérieurs*) à une telle surface, lorsqu'elle est $\neq$ plan de $\mathcal{E}_{n+1}$ (variété linéaire n -dimensionnelle), nous entendons les génératrices intérieures du (rayons extérieurs

⁽²⁵⁾ Nous nous inspirons ici de l'expression « convexe au sens propre » introduite par M. Aronszajn dans 3 à propos du corps ouvert d'étalonnage d'une métrique de Minkowski généralisée.

⁽²⁶⁾ A distinguer de « convexe au sens strict » ; un ensemble de $\mathcal{E}_{n+1}$ convexe au sens strict est un ensemble tel que tout point intérieur au segment joignant deux quelconques de ses points lui soit intérieur. Un cône fermé $\subset \mathcal{E}_{n+1}$ n'est jamais convexe au sens strict.

au) cône convexe dont elle est la frontière ; dans le cas d'un plan de E_{n+1} nous appellons indifféremment rayons intérieurs ou rayons extérieurs les rayons issus du point choisi comme sommet et non situés sur lui.

1.3. THÉORÈME XXII. — $\varphi(\xi_1, \dots, \xi_n, \xi'_1, \dots, \xi'_n)$ étant un intégrant classique défini sur $H \subseteq E_n$ et p_0 un point de H

(φ est quasi-régulier en p_0) $\sim$ (la figurative $S_{\varphi p_0}$ est une surface conique convexe et le rayon $R_{p_0}^+$ issu de p_0 parallèle à la direction positive de l'axe des ξ_{n+1} en est un rayon intérieur),

(φ est quasi-régulier en p_0 et $\chi(p_0)$ est > 0) $\sim$ ($S_{\varphi p_0}$ est une surface conique proprement convexe et $R_{p_0}^+$ en est un rayon intérieur),

(φ est régulier en p_0) $\sim$ ($S_{\varphi p_0}$ est une surface conique strictement convexe et $R_{p_0}^+$ en est un rayon intérieur),

(φ est linéaire au point p_0) $\sim$ ($S_{\varphi p_0}$ est un plan) ⁽²⁷⁾.

Les corrélatives de ces propositions par changement de φ en $-\varphi$ résultent de

$$S_{-\varphi p_0} = \text{cône opposé par le sommet à } S_{\varphi p_0}.$$

1.31. Application du Théorème XXII à un exemple (58', 495).

Soit F un ensemble fermé du plan euclidien E_2 que nous imaginons horizontal; nous désignons pour un point $x = (\xi_1, \xi_2)$ quelconque dans E_2 par $\rho(x) = \rho(\xi_1, \xi_2)$ la plus courte distance de x à F , par $C(x)$ le cercle de centre x et de rayon $\rho(x)$, par $Q(x)$ l'ensemble des points communs à $C(x)$ et F , appelés par M. G. Durand (9, 92) projections de x sur F ; nous introduisons un système d'axes rectangulaires X_1, X_2, X_3 , dont les deux premiers sont situés dans E_2 et nous considérons la surface S d'équation $\xi_3 = \rho(\xi_1, \xi_2)$; pour $x = (\xi_1, \xi_2)$ nous notons par $s(x)$ le point de S qui se projette verticalement sur E_2 en x , $s(x) = (\xi_1, \xi_2, \rho(\xi_1, \xi_2))$; enfin si x n'appartient pas à F , nous représentons par $K(x)$ le cône de révolution de sommet $s(x)$ passant par $C(x)$.

D'après un théorème de M. de Mises, (53, 1354), la fonction $\varphi(x)$ admet

(27) L'interprétation géométrique des propriétés d'un intégrant φ en un point p_0 peut se faire au moyen de la surface d'étalonnage ⁽²⁴⁾ de $(E_n)_{\varphi p_0}$ (indicatrice de Caratheodory, figuratrice de Hadamard) considérée pour la première fois dans le cas de $\varphi > 0$ par G. Hamel (29, 52) et utilisée principalement par Caratheodory (14, 456); elle est due dans le cas général à Menger (50, 25). Voir sur ce point (1, 33), (58, 359-374), (3, 374-376).

en tout point p non situé sur F et suivant toute direction ϖ une dérivée, soit $\varphi(p; \varpi)$ et nous avons

$$-1 \leq \varphi(p; \varpi) \leq +1.$$

Nous regardons $\varphi(p; \varpi)$ comme un intégrant du Calcul des Variations ; son champ de définition est le complémentaire G de F dans $\mathbb{E}_2$; sa figurative en p est le cône $C_s(s)$ des demi-tangentes à S au point $s = s(p)$ amené par translation à avoir p comme sommet ; il résulte d'un théorème de M. Bouligand (11, 554) que le cône $C_s(s)$ se détermine ainsi :

nommons pour chaque q de $Q = Q(p)$, $D(q)$ le demi-espace fermé limité dans $\mathbb{E}_3$ par le plan dont la ligne de pente est la droite $D(s, q)^{(27')}$ et contenant p ; l'intersection des $D(q)$ correspondant aux divers points q de Q est un cône convexe incluant le rayon R_s issu de s et dont la direction est la direction négative de X_3 ; $C_s(s)$ est la frontière de ce cône.

$C_s(s)$ est donc une surface conique convexe ouverte vers le bas ayant en commun avec $K = K(p)$ les génératrices contenant les points q de Q . Du théorème XXII, plus précisément de son corrélatif, découle donc que l'intégrant φ est quasi-régulier négatif.

Poussons plus loin l'analyse en distinguant plusieurs cas suivant la nature de l'ensemble Q des projections de p sur F .

1) p n'a qu'une seule projection q sur F ; le point p est dans la terminologie de M. Bouligand (9, 92) un point ordinaire ; $C_s(s)$ est le plan dont la ligne de pente est $D(s, q)$; il est tangent à K le long de la génératrice portant q ; φ est donc linéaire en p ; ajoutons que d'une proposition de M. Gołab (25, 408) résulte que φ est continu au point p (nécessairement uniformément par rapport à ϖ à cause de la quasi-régularité négative de φ).

2) p a deux projections sur F , q_1 et q_2 ; soit A^* le point d'intersection, éventuellement à l'infini, des tangentes à $C = C(p)$ en q_1 et q_2 , A^* la droite passant par s et A^* ; $C_s(s)$ est constitué par les deux demi-plans limités par A^* et contenant q_1 et q_2 respectivement ; donc φ admet en p une direction de linéarité et une seule perpendiculaire à $D(q_1, q_2)$.

3) p a plus de deux projections sur F ; soit $\widehat{q'q''}$ le plus petit arc de C , contenant tous les points de Q , α son angle au centre ; $C_s(s)$ est un cône, proprement convexe, par conséquent la fonction χ^- est < 0 au point p . Si $\alpha > \pi$, $C_s(s)$ est situé au-dessous du plan horizontal P passant par s , la fonction ρ passe par un maximum local strict au point p ; si $\alpha = \pi$, $C_s(s)$ a en commun avec P une génératrice perpendiculaire à $D(q', q'')$, les autres génératrices sont situées au-dessous de P , la fonction ρ passe par un maximum local au sens large au point p ; si $\alpha < \pi$, $C_s(s)$ traverse P .

Lorsque p n'a qu'un nombre fini de projections sur F , soit, en les nu-

^(27') x et y étant deux points distincts d'un espace euclidien, nous notons $D(x, y)$ la droite qui les joint.

mérôtant dans l'ordre où ils se rencontrent en parcourant toujours dans le même sens $\widehat{q'q''}$ de q' à q''

$$q' = q_1, \dots, q'' = q_m \quad m > 2,$$

$C_s(s)$ est la surface latérale d'une pyramide dans laquelle est inscrit K .

Le seul cas où l'intégrant φ est régulier négatif en p est celui où tous les points du cercle C sont projections de p sur F .

Lorsque p n'est pas un point ordinaire, l'intégrant φ est discontinu en p ; il est aisé de s'en rendre compte lorsque F est formé de deux points et que p est situé sur leur médiatrice; d'une façon générale, l'ensemble des points non ordinaires est situé sur la réunion d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'arcs rectifiables; un tel ensemble est vide si F est un ensemble convexe (9, 98); quant à l'ensemble des points p qui ont plus de deux projections sur F , il est dénombrable. Donc tous les points du champ G de définition de φ , sauf au plus une infinité dénombrable d'entre eux, sont exceptionnels.

1.4. Plans d'appui de la figurative. — Un plan de $\mathcal{E}_{n+1}$ — variété linéaire n -dimensionnelle — d'équation $\xi_{n+1} = \pi(x)$ où $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $\pi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_n \xi_n$, $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ constantes, limite dans $\mathcal{E}_{n+1}$ deux régions (demi-espaces) fermées; l'une $\xi_{n+1} \geq \pi(x)$ est dite région supérieure du plan, l'autre $\xi_{n+1} \leq \pi(x)$, région inférieure du plan.

Par plan d'appui positif (négatif) de la figurative $S_{\varphi p_0}$ le long de la génératrice $T_{p_0 \mathfrak{S}_0}$, nous entendons (cf. 8, 4) un plan passant par $T_{p_0 \mathfrak{S}_0}$ tel que $S_{\varphi p_0}$ soit incluse dans la région fermée supérieure (inférieure) de ce plan; si ce plan, en outre, n'a en commun avec $S_{\varphi p_0}$ que la génératrice $T_{p_0 \mathfrak{S}_0}$, nous disons qu'il est plan d'appui positif (négatif) strict (^{27')}).

THÉORÈME XXIII (cf. (8, 6)). — La condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrant φ défini sur $H \subseteq E_n$ soit quasi-régulier positif (quasi-régulier négatif, régulier positif, régulier négatif), au point p_0 de H est que la figurative de φ en p_0 admette le long de chaque génératrice un plan d'appui positif (négatif, positif strict, négatif strict).

Un plan passant par une génératrice $T_{p_0 \mathfrak{S}_0}$ de $S_{\varphi p_0}$ est dit plan d'appui local positif (négatif) lorsqu'il existe un $\varepsilon_0 > 0$ tel que toute génératrice $T_{p_0 \mathfrak{S}}$ pour laquelle

(^{27')} A distinguer du « plan d'appui au sens strict d'un ensemble » qui n'a avec l'ensemble qu'un point en commun. Cf. 1.5.

angle de ε avec ε_0 est $\leq \varepsilon_0$,

soit incluse dans la région fermée supérieure (inférieure) de ce plan ; si, en outre, il est possible de choisir $\varepsilon_0 > 0$ de manière que parmi les génératrices $T_{p_0\varepsilon}$ vérifiant l'inégalité précédente seule $T_{p_0\varepsilon_0}$ soit incluse dans le plan, nous nommons celui-ci un *plan d'appui local positif (négatif) strict*.

THÉORÈME XXIV. — φ étant un intégrant défini sur $H \subseteq E_n$, et p_0 un point de H tel que $\varphi(p_0; \varepsilon)$ soit une fonction continue de ε , la condition nécessaire et suffisante pour que φ soit quasi-régulier positif (quasi-régulier négatif, régulier positif, régulier négatif) en p_0 est que la figurative de φ en p_0 admette le long de chaque génératrice un plan d'appui local positif (négatif, positif strict, négatif strict).

Notons que si la figurative admet suivant une génératrice un plan tangent, un plan d'appui positif ou négatif le long de celle-ci ainsi qu'un plan d'appui local positif ou négatif, est nécessairement confondu avec le plan tangent.

1.41. *Interprétation métrique du plan d'appui à la figurative.* — Nous avons interprété la propriété pour la métrique tangentielle $\delta_{\varphi p_0}$ de satisfaire à l'inégalité triangulaire $\mathcal{C}_+$ par une propriété de convexité globale de la figurative $S_{\varphi p_0}$; il est naturel de penser que l'existence d'un plan d'appui à $S_{\varphi p_0}$ le long d'une génératrice $T_{p_0\varepsilon_0}$, qui exprime une propriété de convexité localisée, se traduise par une inégalité triangulaire ou polygonale restreinte pour $\delta_{\varphi p_0}$; en fait, nous avons le

THÉORÈME XXV. — φ étant un intégrant défini sur $H \subseteq E_n$ et p_0 un point de H :

(la figurative $S_{\varphi p_0}$ admet le long d'une génératrice $T_{p_0\varepsilon_0}$ un plan d'appui positif) $\rightarrow$ ^(27'') (quel que soit le polygone $P : (p_1, \dots, p_m)$ de E_n avec $p_1 \neq p_m$, $\varepsilon_{p_1 p_m} = \varepsilon_0$, nous avons $\lambda_{\varphi p_0}(P) \geq \delta_{p_0}(p_1 p_m)$),

(la figurative $S_{\varphi p_0}$ admet le long de $T_{p_0\varepsilon_0}$ un plan d'appui positif strict) $\rightarrow$ ^(27''') (quel que soit le polygone $P : (p_1, \dots, p_m)$ de E_n avec $p_1 \neq p_m$, $\varepsilon_{p_1 p_m} = \varepsilon_0$ et au moins un vecteur $\overrightarrow{p_i p_{i+1}}$, $i = 1,$

(27''') Nous présumons l'équivalence.

..., $m - 1$ de direction $\neq z_0$, nous avons $\lambda_{\varphi p_0}(P) > \delta_{\varphi p_0}(p_1 p_m)$ (28).

L'interprétation d'un plan d'appui positif local à $S_{\varphi p_0}$ le long de $T_{p_0 z_0}$ s'obtient en imposant au polygone P dans les seconds membres des implications précédentes que les vecteurs $\overrightarrow{p_i p_{i+1}}$ fassent avec la direction z_0 un angle $\leq \varepsilon_0$, ε_0 étant le nombre positif qui figure dans la définition du plan d'appui local.

Tout ce que nous venons de dire dans cet alinéa admet une traduction corrélatrice par passage de φ à $-\varphi$.

1.5. *Plans bornants de la figurative.* — Nous appelons *plan bornant* (23') *positif (négatif)* de la figurative $S_{\varphi p_0}$ un plan passant par son sommet p_0 , n'ayant en commun avec $S_{\varphi p_0}$ que ce point et tel que $S_{\varphi p_0}$ soit incluse dans la région fermée supérieure (inférieure) de ce plan.

THÉORÈME XXVI. — *La condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrant φ défini sur $H \subseteq E_n$ soit quasi-régulier positif (négatif) au point p_0 de H et n'y admette pas de directions de linéarité est que la figurative de φ soit convexe, ouverte vers les ξ_{n+1} positifs (négatifs) et admette un plan bornant; si cette condition est vérifiée, par tout rayon extérieur à la figurative passe un plan la bornant.*

(28) MM. Gołab et Härten (22,391) disent qu'une métrique de Minkowski ζ de E_3 vérifie l'inégalité triangulaire dans une direction θ lorsque quels que soient les points a , b et x de E_3 avec $a \neq b$, $z_{ab} = \theta$,

$$\zeta(ax) + \zeta(xb) \geq \zeta(ab),$$

et ils montrent (22,392) que cette propriété pour ζ se traduit géométriquement ainsi :

e_θ désignant le point unitaire de la surface d'étalonnage de ζ (Voir (24)), correspondant à la direction θ , les sections de cette surface d'étalonnage par les plans contenant e_θ et le point de référence (Meridianschnitte) admettent une droite d'appui en e_θ .

Un exemple que nous a communiqué M. A. E. Mayer prouve que pour une métrique continue ζ , cette propriété n'implique pas l'existence d'un plan d'appui à la surface d'étalonnage en e_θ . Notons que ζ peut vérifier l'inégalité triangulaire dans la direction θ sans vérifier l'inégalité polygonale dans cette même direction, à savoir

quel que soit le polygone $P : (p_1, \dots, p_m)$ de E_3 avec $p_1 \neq p_m$, $z_{p_1 p_m} = \theta$.

$$\zeta(p_1 p_2) + \dots + \zeta(p_{m-1} p_m) \geq \zeta(p_1 p_m);$$

l'exemple de M. Mayer n'infirme pas notre présomption de (27''').

(28') Cf. la définition d'une borne (Schranke) d'un ensemble en (8,4).

Signalons que, inversement, si par chaque rayon non situé sur le cône positif d'étalonnage $\xi_{n+1} \geq \varphi(p_0, \overrightarrow{p_0 x})$ passe un plan bornant positif à $S_{\varphi p_0}$, $S_{\varphi p_0}$ est proprement convexe et ouverte vers les ξ_{n+1} positifs.

1.51. *Intégrants linéaires bornants d'un intégrant φ quasi-régulier.* — Supposons que l'intégrant $\varphi(x; \varpi)$ défini sur un ensemble fermé H de E_n soit en chaque point p de H continu en x uniformément par rapport à ϖ et quasi-régulier; en tout point $p_0 = (\xi_1^{(0)}, \dots, \xi_n^{(0)})$ non exceptionnel, d'après le théorème XXVI, la figurative $S_{\varphi p_0}$ admet un plan bornant positif; écrivons son équation sous la forme

$$\xi_{n+1} = \alpha_1 \cdot (\xi_1 - \xi_1^{(0)}) + \dots + \alpha_n \cdot (\xi_n - \xi_n^{(0)});$$

ce plan est la figurative en p_0 de l'intégrant linéaire

$$\pi(x, x') = \alpha_1 \cdot \xi'_1 + \dots + \alpha_n \cdot \xi'_n;$$

si nous posons

$$\varphi(x, x') = \pi(x, x') + \varphi^*(x, x'),$$

nous faisons apparaître φ comme somme de deux intégrants: le premier π est un intégrant linéaire à coefficients constants dit *intégrant linéaire bornant inférieurement φ en p_0* , le second φ^* est quasi-régulier comme φ , mais en outre il est *positif sur un voisinage de p_0 dans H* .

Pour une courbe $\mathcal{C}$ quelconque située sur H de point initial $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ et de point final $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, $\lambda_\pi(\mathcal{C})$ existe et est

$$= \alpha_1 \cdot (\gamma_1 - \beta_1) + \dots + \alpha_n \cdot (\gamma_n - \beta_n),$$

λ_π est donc une fonction continue sur la famille de toutes les courbes situées sur H .

Aussi, l'étude des propriétés d'existence et de semi-continuité de λ_φ sur une courbe $\mathcal{C}_0$ située sur H , ne contenant pas de points exceptionnels se ramène-t-elle à celle des mêmes propriétés dans le cas d'un intégrant positif en décomposant $\mathcal{C}_0$ en un nombre fini de segments consécutifs adjacents

$$\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_0^{(1)} + \dots + \mathcal{C}_0^{(m)}$$

tels que pour chaque $i = 1, \dots, m$ il existe une forme linéaire π_i à coefficients constants bornant inférieurement φ en tous les

points de $\mathbb{C}_0^{(i)}$; cette décomposition est possible en vertu du lemme de Borel-Lebesgue (27, 95-97).

Ce procédé de réduction au cas positif pour un intégrant $\varphi(x, x')$ continu en (x, x') admettant localement une forme linéaire le bornant inférieurement a été introduit et utilisé par M. Tonelli (cf. 66, 269-271 et aussi 284-285); M. Hahn et M. Aronszajn (cf. 3), entre autres, en ont fait usage, M. Aronszajn en particulier dans l'espace de Hilbert; pour un intégrant continu φ quasi-régulier, l'intérêt du point non exceptionnel réside en ce que φ admet une forme linéaire A COEFFICIENTS CONSTANTS ⁽²⁹⁾ le bornant inférieurement sur un voisinage de ce point. Chez M. Menger, c'est la positivité de la fonction χ qui intervient dans les raisonnements.

Tout ce que nous venons de développer peut être répété corrélativement pour un intégrant φ quasi-régulier négativement.

2. Interprétation différentielle de la quasi-régularité.

Supposons que l'intégrant $\varphi(\xi_1, \dots, \xi_n, \xi'_1, \dots, \xi'_n)$ dont le champ de définition est l'ensemble H de $\mathbb{E}_n$ jouisse de la propriété de dérivabilité suivante: quel que soit le point $x_0 = (\xi_1^{(0)}, \dots, \xi_n^{(0)})$ de H, la fonction $\varphi(\xi_1^{(0)}, \dots, \xi_n^{(0)}, \xi'_1, \dots, \xi'_n)$ est continue vis-à-vis de $(\xi'_1, \dots, \xi'_n)$ et admet en tout $(\xi'_1, \dots, \xi'_n) \neq (0, \dots, 0)$ des dérivées secondes par rapport à $\xi'_1, \dots, \xi'_n$ continues. Introduisons le déterminant de ces dérivées secondes

$$\Delta(\xi_1, \dots, \xi_n, \xi'_1, \dots, \xi'_n) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_1'^2} & \dots & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_1' \partial \xi_n'} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_n' \partial \xi_1'} & \dots & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_n'^2} \end{vmatrix} = \Delta(x, x').$$

⁽²⁹⁾ Remarquons que sous la seule hypothèse de la quasi-régularité de φ en p_0 , l'équation d'un plan d'appui positif à $S_{\varphi p_0}$ nous fournit aussitôt une forme linéaire $\pi(p_0, x')$ telle que $\varphi(p_0, x') - \pi(p_0, x')$ soit ≥ 0 quel que soit x' ; mais, φ étant supposé continu en (x, x') , nous n'en déduisons pas que l'intégrant $\varphi(p, x') - \pi(p_0, x')$ soit ≥ 0 dans un voisinage de p_0 sur H. En réponse à une question que nous avons soulevée, M. Aronszajn a démontré que si φ est continu et quasi-régulier, il existe une forme linéaire π à coefficients continus définie sur H telle que $\varphi - \pi$ soit ≥ 0 sur H et même, a-t-il ajouté, telle que $\varphi - \pi$ soit > 0 sur H sous l'hypothèse supplémentaire $\chi > 0$.

De la positive homogénéité de φ vis-à-vis de $\xi_1', \dots, \xi_n'$ résulte que ce déterminant est nul. Désignons pour $i = 1, \dots, n$ par $\Delta^{(i)}(x, x')$ le mineur qui résulte de $\Delta(x, x')$ par suppression de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $i^{\text{ème}}$ colonne, puis par $\Delta_{n-1}(x, x')$ la somme de ces mineurs ⁽³⁰⁾

$$\Delta_{n-1}(x, x') = \Delta^{(1)}(x, x') + \dots + \Delta^{(n)}(x, x').$$

THÉORÈME XXVII. ⁽³¹⁾ — La condition nécessaire et suffisante pour que $\varphi(x, x')$ soit quasi-régulier au point p est que $\Delta_{n-1}(p, x')$ soit ≥ 0 quel que soit $x' \neq 0$.

Une condition suffisante pour que $\varphi(x, x')$ soit régulier au point p est que

$\Delta_{n-1}(p, x')$ soit > 0 quel que soit $x' \neq 0$.

Signalons que, si $\varphi(p_0, x')$ est une fonction analytique de $(\xi_1', \dots, \xi_n') \neq (0, \dots, 0)$ et si φ est quasi-régulier en p_0 , deux cas seulement sont possibles :

ou bien φ est régulier }
ou bien φ est linéaire } au point p_0 .

2.1. Cas du plan. Fonctions de Legendre et de Weierstrass. — Dans le cas $n = 2$:

$$\Delta_1(\xi_1, \xi_2, \xi_1', \xi_2') = (\xi_1'^2 + \xi_2'^2) \cdot \varphi_1(\xi_1, \xi_2, \xi_1', \xi_2')$$

où φ_1 est la fonction de Legendre (7, 196 ; 66, 205) relative à φ définie en tout point $x = (\xi_1, \xi_2)$ de H par

$$\begin{aligned} \varphi_1(\xi_1, \xi_2, \xi_1', \xi_2') &= \frac{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_1'^2}}{\xi_2'^2} = \frac{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_1' \partial \xi_2'}}{-\xi_1' \cdot \xi_2'} = \frac{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_2'^2}}{\xi_1'^2} & \text{si } \xi_1' \neq 0 \quad \xi_2' \neq 0, \\ \varphi_1(\xi_1, \xi_2, \xi_1', \xi_2') &= \frac{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_1'^2}}{\xi_2'^2} & \text{si } \xi_1' = 0 \quad \xi_2' \neq 0, \\ \varphi_1(\xi_1, \xi_2, \xi_1', \xi_2') &= \frac{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_2'^2}}{\xi_1'^2} & \text{si } \xi_1' \neq 0 \quad \xi_2' = 0. \end{aligned}$$

⁽³⁰⁾ C'est le coefficient de s dans l'équation en s relative à ce déterminant.

⁽³¹⁾ Ce théorème constitue la transcription à un intégrant du Calcul des Variations de deux propositions relatives à la traduction différentielle de la convexité d'une fonction positivement homogène définie dans tout l'espace, dues à M. Fenchel qui a eu l'obligeance de nous les communiquer dans une lettre du 16/I/1938.

φ_1 est une fonction positivement homogène de degré -3 en (ξ'_1, ξ'_2) (7, 197) ; nous posons pour θ avec $0 \leq \theta < 2\pi$

$$\gamma(x, \theta) = \varphi(x, \cos \theta, \sin \theta)$$

et

$$\gamma_1(x, \theta) = \varphi_1(x, \cos \theta, \sin \theta) = \gamma(x, \theta) + \frac{\delta^2}{\delta \theta^2} \gamma(x, \theta).$$

THÉORÈME XXVIII. — *Les axes de coordonnées dans $\mathcal{E}_2$ étant supposés rectangulaires, $S_{\varphi p_0}$ désignant la figurative de l'intégrant φ au point p_0 , T_0 une génératrice de $S_{\varphi p_0}$, R_0 la projection de T_0 sur $\mathcal{E}_2$, θ_0 l'angle de R_0 avec la direction positive de l'axe des ξ_1 , φ_1 la fonction de Legendre relative à φ :*

($S_{\varphi p_0}$ admet un plan d'appui local positif le long de T_0) $\sim$ ($\varphi_1(p_0, x') \geq 0$ pour les vecteurs x' non nuls parallèles à R_0 et de même sens) $\sim$ ($\gamma_1(p_0, \theta_0) \geq 0$) (Cf. 7, 248),

(φ est quasi-régulier en p_0) $\sim$ ($\varphi_1(p_0, x') \geq 0$ quel que soit le vecteur x' de $\mathcal{E}_2$ non nul) $\sim$ ($\gamma_1(p_0, \theta) \geq 0$ quel que soit θ),

($\gamma_1(p_0, \theta_0) > 0$) $\rightarrow$ ($S_{\varphi p_0}$ admet un plan d'appui local positif strict le long de T_0).

(φ est régulier en p_0) $\sim$ ($\gamma_1(p_0, \theta) \geq 0$ quel que soit θ et $\gamma_1(p_0, \theta) > 0$ sur un ensemble de valeurs de θ dense sur l'intervalle $[0, 2\pi]$).

Supposons maintenant de l'intégrant $\varphi(\xi_1, \xi_2, \xi'_1, \xi'_2)$ défini sur l'ensemble H de $\mathcal{E}_2$ qu'il satisfasse seulement à la propriété de dérivabilité suivante : quel que soit le point $x_0 = (\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)})$ de H , la fonction $\varphi(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \xi'_1, \xi'_2)$ est continue vis-à-vis de ξ'_1, ξ'_2 et admet en tout $(\xi'_1, \xi'_2) \neq (0, 0)$ des dérivées premières en ξ'_1 et ξ'_2 ; la figurative $S_{\varphi x_0}$ possède alors au point

$$(\xi_1^{(0)} + \xi_1'^{(0)}, \xi_2^{(0)} + \xi_2'^{(0)}, \varphi, \xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \xi_1'^{(0)}, \xi_2'^{(0)})$$

pour $(\xi_1'^{(0)}, \xi_2'^{(0)}) \neq (0, 0)$ un plan tangent d'équation

$$\xi_3 = (\xi_1 - \xi_1^{(0)}) \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1'} (\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \xi_1'^{(0)}, \xi_2'^{(0)}) + (\xi_2 - \xi_2^{(0)}) \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_2'} (\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \xi_1'^{(0)}, \xi_2'^{(0)}) ;$$

désignons ce plan par $P_{(x_0, x'_0)}$; il inclut la génératrice de $S_{\varphi x_0}$ passant par le point considéré. La fonction de Weierstrass (7, 243 ; 66, 209) relative à φ est la fonction

$$\begin{aligned} \varepsilon(x, x', x'^*) &= \varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_1^*, \xi_2^*) - (\xi_1^* \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1'} (\xi_1, \xi_2, \xi_1', \xi_2')) \\ &\quad + \xi_2^* \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_2'} (\xi_1, \xi_2, \xi_1', \xi_2')) \end{aligned}$$

définie quels que soient le point $x = (\xi_1, \xi_2)$ de H , et les vecteurs non nuls x' et x'^* de $\mathcal{E}_2$ de composantes ξ'_1 et ξ'_2 , ξ_1^* et ξ_2^* respectivement ; $\varepsilon(x, x', x'^*)$ exprime la différence de cote entre le point de $S_{\varphi x}$ et le point de $P_{(x, x')}$ dont la projection horizontale est $(\xi_1 + \xi_1^*, \xi_2 + \xi_2^*)$; cette fonction est donc positivement homogène (sous-entendu : de degré 1) par rapport à x'^* ; λ représentant un nombre > 0 , comme $P_{(x, \lambda x')} = P_{(x, x')}$

$$\varepsilon(x, \lambda x', x'^*) = \varepsilon(x, x', x'^*);$$

si les vecteurs x' et x'^* ont la même direction $\varepsilon(x, x', x'^*) = 0$.

THÉORÈME XXIX. — $S_{\varphi x_0}$ désignant la figurative de l'intégrant φ de $\mathcal{E}_2$ au point x_0 , ε la fonction de Weierstrass relative à φ et pour un vecteur $x' \neq 0$ de direction $\varepsilon(x')$, $T_{(x_0 x')}$ la génératrice de $S_{\varphi x_0}$ dont la projection sur $\mathcal{E}_2$ a la direction $\varepsilon(x')$:

$(\varepsilon(x_0, x'_0, x'^*) \geq 0$ quel que soit $x'^* \neq 0) \sim (S_{\varphi x_0}$ admet le long de $T_{(x_0 x'_0)}$ un plan d'appui positif, d'ailleurs confondu avec le plan tangent),

$(\varepsilon(x_0, x'_0, x'^*) = 0$ quel que soit $x'^* \neq 0$ de direction $\neq \varepsilon(x'_0)) \sim (S_{\varphi x_0}$ admet le long de $T_{(x_0 x'_0)}$ un plan d'appui positif strict),

$(\varepsilon(x_0, x', x'^*) \geq 0$ quels que soient $x' \neq 0$ et $x'^* \neq 0) \sim (\varphi$ est quasi-régulier positif au point $x_0)$,

$(\varepsilon(x_0, x', x'^*) > 0$ quels que soient $x' \neq 0$ et $x'^* \neq 0$ avec $\varepsilon(x') \neq \varepsilon(x'^*) \rightarrow (\varphi$ est régulier positif au point $x_0)$.

Les résultats corrélatifs de ceux de ce paragraphe s'obtiennent par un changement convenable dans les signes des inégalités qui y figurent.

4. LIAISON ENTRE LA THÉORIE MÉTRIQUE ET LA THÉORIE DE TONELLI

1. Intégrale de Lebesgue-Tonelli (62, 229-235). — $\varphi(\xi_1, \dots, \xi_n, \xi'_1, \dots, \xi'_n) = \varphi(x, x')$ étant un intégrant dont le champ est un sous-ensemble H de $\mathcal{E}_n$, continu en (x, x') , $\mathcal{C}$ une courbe rectifiable de $\mathcal{E}_n$ située dans H dont la représentation au moyen de l'abscisse curviligne λ est s , l'intégrale curviligne de Lebesgue ou intégrale de Lebesgue-Tonelli de φ le long de $\mathcal{C}$, est définie, en tenant compte de ce que la dérivée $\frac{ds}{d\lambda}$ existe pour presque toutes les valeurs

de l'intervalle $[0, \lambda(\mathcal{C})]$, comme l'intégrale ordinaire de Lebesgue

$$\int_0^{\lambda(\mathcal{C})} \varphi(s(\lambda), \frac{d}{d\lambda} s(\lambda)) \cdot d\lambda \quad (66, 217).$$

M. Tonelli a montré (66, 219) que si $\mathbf{p}$ est une représentation de $\mathcal{C}$

$$\mathbf{p}(\tau) = (\xi_1(\tau), \dots, \xi_n(\tau)) \quad \alpha \leq \tau \leq \beta$$

telle que les fonctions $\xi_1, \dots, \xi_n$ soient absolument continues, cette intégrale est encore égale à l'intégrale de Lebesgue

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(\mathbf{p}(\tau), \frac{d\mathbf{p}}{d\tau}(\tau)) \cdot d\tau,$$

mais que cette égalité cesse d'être vérifiée pour une représentation $\mathbf{p}$ telle que $\xi'_1, \dots, \xi'_n$ ne soient pas absolument continues (66, 221-222). La fonctionnelle de courbe de M. Tonelli en Calcul des Variations est précisément l'intégrale précédente.

XXX. THÉORÈME D'ÉQUIVALENCE DE TONELLI-ARONSZAJN (63, 452 ; 59, 64) — $\varphi(x, x')$ étant un intégrant continu en (x, x') , pour toute courbe rectifiable $\mathcal{C}$ située dans son champ H , l'intégrale de Weierstrass $\int_{\mathcal{C}} \varphi(x, dx)$ existe et est finie et sa valeur n'est autre que celle de l'intégrale de Lebesgue-Tonelli de φ le long de $\mathcal{C}$.

Rappelons à propos de ce théorème que si un intégrant $\varphi(x; \varpi)$ est quasi-régulier + ou — et en tout point p de son champ continu en x uniformément par rapport à ϖ , il est continu en $(x; \varpi)$, aussi la première partie du théorème XVII peut-elle être considérée comme conséquence du théorème précédent.

La méthode utilisée par M. Aronszajn, dans l'établissement du théorème XXX permet de donner une démonstration directe très simple du

XXXI. THÉORÈME DE CONVERGENCE DE TONELLI (64, 554 ; 66, 227). — $\varphi(x, x')$ étant un intégrant continu en (x, x') et $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_m, \dots$, représentant des courbes rectifiables situées dans son champ

$$(\lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{C}_m = \mathcal{C}_0) \text{ et } (\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda(\mathcal{C}_m) = \lambda(\mathcal{C}_0)) \rightarrow (\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{C}_m} \varphi(x, dx) = \int_{\mathcal{C}_0} \varphi(x, dx)) \quad (32).$$

(32) Ce théorème est énoncé chez M. Tonelli au moyen de l'intégrale de Lebesgue-Tonelli équivalente sur une courbe rectifiable d'après le théorème XXX à l'intégrale de Weierstrass.

Cas particulier (cf. 55, 293). — $\mathcal{C}$ étant une courbe rectifiable de $\mathcal{E}_n$ située dans le champ de l'intégrant $\varphi(x, x')$, $P_1, \dots, P_m, \dots$ une suite distinguée quelconque de sous-polygones de $\mathcal{C}$, $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_m, \dots$ la suite des lignes polygonales correspondantes, l'intégrale de Riemann de φ le long de $\mathcal{P}_m$ tend lorsque $m \rightarrow \infty$, vers l'intégrale de Weierstrass de φ le long de $\mathcal{C}$.

2. Quasi-régularité et régularité de Tonelli (66, 224). — Soit φ un intégrant de champ $H \subseteq \mathcal{E}_2$ continu par rapport à l'ensemble de ses arguments et admettant quels que soient $x = (\xi_1, \xi_2)$ de H et $(\xi'_1, \xi'_2) \neq (0, 0)$ des dérivées secondes

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_1'^2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_1' \cdot \partial \xi_2'}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_2'^2}$$

continues elles aussi en $(\xi_1, \xi_2, \xi'_1, \xi'_2)$; ce sont là les hypothèses de M. Tonelli (66, 203); désignons par φ_1 la fonction de Legendre relative à φ .

φ est dit, *suyant Tonelli*, en un point $x_0 = (\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)})$ de H *quasi-régulier* si $\varphi_1(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \xi'_1, \xi'_2)$ est ≥ 0 pour tous les couples (ξ'_1, ξ'_2) de nombres non simultanément nuls,

quasi-régulier semi-normal, s'il est quasi-régulier et si $\varphi_1(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \cos \theta, \sin \theta)$ n'est pas identiquement nul en θ ,

quasi-régulier normal s'il est quasi-régulier et si les valeurs de θ qui annullent $\varphi_1(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \cos \theta, \sin \theta)$ ne remplissent aucun vrai intervalle,

régulier si $\varphi_1(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \xi'_1, \xi'_2)$ est > 0 pour tous les $(\xi'_1, \xi'_2) \neq (0, 0)$.

Par conséquent, d'après l'étude du § 3 (Cf. particulièrement le théorème XXVIII) :

(quasi-régularité de φ en x_0 au sens de § 2, 2.1) $\sim$ (quasi-régularité de φ en x_0 au sens de Tonelli),

(quasi-régularité de φ en x_0 au sens de § 2, 2.1) et $(\chi(x_0) > 0)$ $\sim$ (quasi-régularité semi-normale de φ en x_0 au sens de Tonelli),

(régularité de φ en x_0 au sens de § 2, 2.3) $\sim$ (quasi-régularité normale de φ en x_0 au sens de Tonelli).

2.1. Comparaison entre les théorèmes d'existence et de semi-continuité de la fonctionnelle dans la théorie métrique et dans la théorie de Tonelli. — Dans la théorie de Tonelli, la fonctionnelle

est définie dans des conditions telles (continuité de l'intégrant, rectificabilité de la courbe) que son existence résulte de sa définition d'après la théorie de l'intégrale de Lebesgue ; aussi celle-ci une fois donnée, la théorie de Tonelli s'occupe uniquement d'établir les propriétés de la fonctionnelle sous des hypothèses supplémentaires sur l'intégrant.

Dans la théorie métrique, rien n'est supposé *A PRIORI* sur l'intégrant et sur la courbe ⁽³³⁾ ; aussi dès que les hypothèses de départ sont posées, le premier problème qui se pose est celui de la mise en évidence d'une famille de courbes sur laquelle nous soyons assurés de l'existence de la fonctionnelle ; une telle famille est celle des courbes rectifiables du champ de l'intégrant dans le théorème XVII, celle de toutes les courbes de ce champ dans le théorème XVIII.

Si nous passons aux propositions (Théorèmes XVII-XXI) concernant la semi-continuité de la fonctionnelle, nous voyons qu'elles sont tout à fait analogues à celles de Tonelli, 66, 261-287 et 292-294 ; elles en constituent une généralisation à double titre :

- 1) elles ne supposent pas la dérivabilité de φ ⁽³⁴⁾,
- 2) elles sont valables pour un espace euclidien quelconque ; chez Tonelli, E_n est le plan euclidien.

Les conditions de dérivabilité imposées par Tonelli à l'intégrant ont principalement comme but de lui permettre l'utilisation de certains procédés de calcul (ex. : formule de Schwarz, 66, 208) et il est naturel que la méthode métrique ne les fasse pas intervenir ⁽³⁴⁾ dès que les hypothèses où elles apparaissent (ex. :

⁽³³⁾ A propos du progrès qui consiste à « délimiter le domaine d'application d'une définition quand n'est introduite *a priori* aucune restriction à son emploi », nous renvoyons à la remarque de M. Lebesgue relative à la comparaison entre la définition de l'intégrale donnée par Cauchy et celle donnée par Riemann (36, 24).

⁽³⁴⁾ Notons ici que M. Tonelli a maintes fois signalé le caractère accessoire des hypothèses de dérivabilité (66, 229, 238, 258, 272, 275, 290, ...) ; il remarque par exemple en (66, 268) que le raisonnement par lequel il établit la semi-continuité inférieure de la fonctionnelle dans le cas d'un intégrant ≥ 0 , quasi-régulier +, ne fait pas intervenir les dérivées

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi_1'^2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_1' \cdot \partial \xi_2'}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_2'^2},$$

mais seulement la propriété pour la figurative de tourner sa concavité vers les ξ_2 positifs, et même dans (69, 410), à propos de l'article 10 de M. Bouligand,

quasi-régularité de Tonelli) ont reçu une traduction métrique convenable. Malgré cela, une fois cette traduction faite, une proposition de Tonelli peut devenir inexacte lorsque sont abandonnées les hypothèses de dérivabilité. Ainsi dans la théorie de Tonelli, la fonctionnelle correspondant à un intégrant $\varphi(\xi_1, \xi_2, \xi'_1, \xi'_2) \geq 0$, quasi-régulier + est semi-continue inférieurement sur la famille de toutes les courbes rectifiables situées dans le champ de φ ; cette proposition n'est pas valide si nous ne supposons pas comme Tonelli l'existence de dérivées pour φ ainsi qu'il résulte de l'exemple suivant dû à M. Aronszajn :

l'intégrant est donné par

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, \xi'_1, \xi'_2) = |\sin \alpha \cdot \xi'_2 - \cos \alpha \cdot \xi'_1|,$$

α étant une fonction de (ξ_1, ξ_2) définie dans tout le plan ainsi que nous allons l'expliquer.

Posons pour $n = 1, 2, \dots$

$$a_n = \left(0, \frac{1}{2n-1}\right) \quad b_n = \left(0, \frac{1}{2n}\right) \quad c_n = \left(1, \frac{1}{2n-1}\right) \quad d_n = \left(1, \frac{1}{2n}\right);$$

désignons par A_n le segment de droite joignant a_n et c_n , par B_n celui joignant b_n et d_n et partageons A_n et B_n en $2n^3$ segments égaux au moyen des points $a_{n,i}$ pour A_n , $b_{n,i}$ pour B_n où $i = 1, \dots, 2n^3-1$; soient $a''_{n,i}$ et $a'_{n,i}$ les points situés sur A_n à la distance $\frac{1}{4n^4}$ de $a_{n,i}$, à gauche et à droite de ce point respectivement et de même

$$b'_{n,i} = \left(\frac{i}{2n^3} - \frac{1}{4n^4}, \frac{1}{2n}\right) \quad b''_{n,i} = \left(\frac{i}{2n^3} + \frac{1}{4n^4}, \frac{1}{2n}\right);$$

convenons en outre que

$$b''_{n,0} = \left(\frac{1}{4n^4}, \frac{1}{2n}\right) \quad b'_{n,2n^3} = \left(1 - \frac{1}{4n^4}, \frac{1}{2n}\right).$$

il affirme qu'en tenant compte des propriétés différentielles des fonctions convexes, sa méthode, toujours dans le cas du plan, s'applique indépendamment de toute hypothèse de dérivabilité. Notre point de vue à ce propos est le suivant :

1) la méthode de Tonelli est susceptible d'éliminer les hypothèses de dérivabilité; la méthode métrique ne les fait pas intervenir; c'est ainsi que la propriété de dérivabilité presque partout des coordonnées du point courant d'une courbe rectifiable vis-à-vis du paramètre n'intervient à aucun moment dans les raisonnements métriques;

2) l'abandon des hypothèses de dérivabilité est d'importance secondaire; les hypothèses posées initialement par Tonelli sont d'une généralité suffisante pour les applications aux problèmes que posent la mécanique et la physique; l'intérêt de la méthode métrique réside surtout dans la simplicité de ses raisonnements et la manière dont elle met en lumière le rôle des hypothèses.

Considérons la ligne polygonale $\mathcal{F}_n$ dont les sommets successifs sont

$$b''_{n,0}, a'_{n,1}, a''_{n,1}, b'_{n,2}, b''_{n,2}, a'_{n,3}, a''_{n,3}, \dots, a'_{n,2n^3-1}, a''_{n,2n^3-1}, b'_{n,2n^3};$$

ses côtés sont les segments de droite

$$\begin{aligned} S_{n,j}^* &= [b''_{n,2j} a'_{n,2j+1}] & S_{n,j}^{**} &= [a''_{n,2j+1} b'_{n,2j+2}] \\ H_{n,j}^* &= [a'_{n,2j+1} a''_{n,2j+1}] & H_{n,j}^{**} &= [b'_{n,2j} b''_{n,2j}] \end{aligned}$$

où $j = 0, \dots, n^3-1$. La direction $\mathfrak{S}_n^*$ suivant laquelle sont parcourus sur $\mathcal{F}_n$ les segments $S_{n,j}^*$ fait avec la direction positive de l'axe des ξ_2 un angle α_n^* compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^* = 0;$$

la direction $\mathfrak{S}_n^{**}$ suivant laquelle sont parcourus sur $\mathcal{F}_n$ les segments $S_{n,j}^{**}$ fait avec la direction positive de l'axe des ξ_2 un angle compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ qui est $= -\alpha_n^*$. Notons encore que la somme des longueurs des segments de $\mathcal{F}_n$ parallèles à l'axe des ξ_1 tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$. Introduisons le segment I d'extrémités (0,0) et (1,0) et appelons R la réunion des segments $S_{n,j}^*$, $S_{n,j}^{**}$ et I qui est un ensemble fermé et borné.

Nous définissons la fonction α aux points r de R par

$$\alpha(r) = \begin{cases} \alpha_n^* & \text{si } r \text{ se trouve sur un } S_{n,j}^*, \\ -\alpha_n^* & \text{si } r \text{ se trouve sur un } S_{n,j}^{**}, \\ 0 & \text{si } r \text{ appartient à I} \end{cases}$$

et nous prolongeons par continuité de manière quelconque dans tout le plan ce qui est possible (Cf. par exemple 66, 383 et 21, 257).

L'intégrant φ ainsi obtenu est ≥ 0 ; il est continu par rapport à l'ensemble de ses arguments; sa figurative en tout point du plan des (ξ_1, ξ_2) est constitué par deux demi-plans dont l'arête commune est dans le plan des (ξ_1, ξ_2) et fait l'angle α avec l'axe des ξ_2 ; elle détermine un dièdre, ouvert vers la direction positive de cet axe; φ est quasi-régulier positif.

Considérons la suite des courbes $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n, \dots$ qui convergent vers la courbe $\mathcal{J}$ obtenue en parcourant le segment I vers les ξ_1 croissants; les segments rectilignes de $\mathcal{F}_n$ non parallèles à l'axe des ξ_1 ont, grâce à la définition de l'intégrant, une φ -longueur nulle; par conséquent

$\lambda_\varphi(\mathcal{F}_n) =$ somme des φ -longueurs des segments de $\mathcal{F}_n$ parallèles à l'axe des ξ_1

et comme la somme des longueurs de ces derniers segments tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_\varphi(\mathcal{F}_n) = 0;$$

or

$$\lambda_{\varphi}(\mathcal{J}) = 1,$$

la fonctionnelle λ_{φ} n'est pas semi-continue inférieurement sur la courbe $\mathcal{J}$. Il faut s'attendre, en vertu du théorème XVII, à ce que les longueurs des courbes $\mathcal{F}_n$ ne soient pas bornées ; en fait

$$\lim \lambda(\mathcal{F}_n) = +\infty$$

L'explication de cette divergence entre la théorie de Tonelli à celle que nous venons de développer, réside dans la remarque du § 2, 2.2 suivant laquelle, lorsqu'un intégrant quasi-régulier admet des dérivées premières en ξ'_1 et ξ'_2 pour $(\xi'_1, \xi'_2) \neq (0,0)$, il est linéaire en tout point exceptionnel, par conséquent identiquement nul en (ξ'_1, ξ'_2) en un tel point s'il est constamment ≥ 0 . Un intégrant φ du plan continu, dérivable en ξ'_1 et ξ'_2 pour $(\xi'_1, \xi'_2) \neq (0,0)$, non négatif et quasi-régulier positif, satisfait donc aux hypothèses du théorème XIX et nous retrouvons le théorème de Tonelli mentionné. Dans l'exemple de M. Aronszajn, l'intégrant n'admet pas de dérivées par rapport à ξ'_1 et ξ'_2 lorsque

$$\sin \alpha \cdot \xi'_2 - \cos \alpha \cdot \xi'_1 = 0;$$

aux points exceptionnels, qui sont ici tous les points du plan, φ ne s'annule pas identiquement en (ξ'_1, ξ'_2) ; les hypothèses du théorème XIX ne sont pas vérifiées. M. Aronszajn a remarqué qu'en changeant un peu la définition de φ , il est possible de faire en sorte que seuls les points du segment I soient exceptionnels.

2.2. Conditions nécessaires pour la semi-continuité de λ_{φ} . —

Les procédés employés par Tonelli pour mettre en évidence de telles conditions sont applicables dans la théorie métrique, toutefois après adaptation convenable ; ainsi lorsque Tonelli veut établir sa première condition nécessaire (66, 234) pour que la fonctionnelle correspondant à un intégrant φ du plan soumis aux hypothèses de dérivabilité précisées au début de ce § 2, soit semi-continue inférieurement sur la famille des courbes rectifiables situées dans son champ H, il suppose qu'en un point $x_0 = (\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)})$ intérieur à H, pour un certain angle θ_0 , la fonction de Legendre $\varphi_1(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \cos \theta_0, \sin \theta_0)$ soit < 0 ; de la continuité de φ_1 résulte l'existence d'un $\eta > 0$ et d'un $\varepsilon > 0$ tels que $\varphi_1(\xi_1, \xi_2, \cos \theta, \sin \theta)$ soit $\leq -\varepsilon$ quand sont satisfaites les inégalités

$$|\xi_1 - \xi_1^{(0)}| \leq \delta \quad |\eta - \eta_1^{(0)}| \leq \delta \quad |\theta - \theta_0| \leq \delta;$$

il introduit alors une ligne polygonale $\mathcal{P}_\lambda$ dont les côtés ont tous la même longueur λ , qui s'appuie sur un segment orienté $\mathcal{P}_0$ issu de x_0 , de direction θ_0 et suffisamment petit, et dont les côtés font avec $\mathcal{P}_0$ des angles successivement égaux à $\theta_0 - \alpha$ et $\theta_0 + \alpha$ où $\alpha \leq \delta$, $\alpha \leq \frac{\pi}{4}$; en choisissant convenablement λ , il montre que λ_φ n'est pas semi-continue inférieurement en $\mathcal{P}_0$.

Dans la théorie métrique, φ étant supposé défini et continu sur $H \subseteq \mathcal{E}_n$, nous partons de l'hypothèse que φ n'est pas quasi-régulier en un point $x_0 = (\xi_1^{(0)}, \dots, \xi_n^{(0)})$ intérieur à H , donc qu'il existe un triplet de points a, b, c tel que $\delta_{\varphi x_0}(ab) + \delta_{\varphi x_0}(bc)$ soit $< \delta_{\varphi x_0}(ac)$; de la continuité de φ nous déduisons l'existence d'un $\delta > 0$ et d'un $\eta > 0$ tels que pour $|\xi_1 - \xi_1^{(0)}| \leq \delta, \dots, |\xi_n - \xi_n^{(0)}| \leq \delta$, nous ayons

$$\delta_{\varphi x}(ab) + \delta_{\varphi x}(bc) - \delta_{\varphi x}(ac) \leq -\eta, \quad x = (\xi_1, \dots, \xi_n);$$

pour faire apparaître la non semi-continuité inférieure de λ_φ , nous introduisons alors un segment issu de x_0 et une ligne polygonale s'appuyant sur lui et formant avec lui une succession de triangles égaux homothétiques au triangle a, b, c .

THÉORÈME XXXI. — $\varphi(x, x')$ étant un intégrant de champ $H \subseteq \mathcal{E}_n$ continu par rapport à (x, x') ,

une condition nécessaire ⁽³⁵⁾ pour que λ_φ soit semi-continue inférieurement sur toute famille de courbes (de $\mathcal{E}_n$) situées sur H , de longueurs uniformément bornées est qu'en tout point intérieur (relativement à $\mathcal{E}_n$) de H et en tout point d'accumulation de tels points, φ soit quasi-régulier (cf. 66, 231);

pour que λ_φ soit semi-continue inférieurement sur la famille de toutes les courbes rectifiables (de $\mathcal{E}_n$) situées sur H , il est nécessaire ⁽³⁵⁾ que, outre la condition précédente, soit vérifiée la suivante : en tout point p de H , il existe un voisinage de p dans H tel que la φ -longueur de toute courbe fermée rectifiable située sur lui soit ≥ 0 (cf. 66, 235).

Notons la conséquence suivante : une condition nécessaire ⁽³⁵⁾ pour que λ_φ soit continue sur la famille de toutes les courbes recti-

⁽³⁵⁾ et suffisant(e) d'après les théorèmes XVII et XIX si les points frontières de H sont tous points d'accumulation de points intérieurs à H , ce qui est le cas par exemple si H est la fermeture d'un ensemble ouvert de $\mathcal{E}_n$.

fiabiles situées sur H est que, en tout point intérieur de H et en tout point d'accumulation de tels points, φ soit linéaire par rapport à x' , et qu'en chaque point p de H, il existe un voisinage de p dans H, tel que la φ -longueur des courbes rectifiables fermées situées sur lui soit nulle (cf. 66, 242).

3. La fonction de Weierstrass chez Tonelli et son équivalent dans la théorie métrique. — Le théorème XXIX nous a montré les relations entre le signe de la fonction de Weierstrass et la présence de plans d'appuis à la figurative, et le théorème XXV, la signification métrique de l'existence de plans d'appui à la figurative ; aussi pouvons-nous généraliser dans la théorie métrique les théorèmes de Tonelli où intervient la fonction de Weierstrass.

THÉORÈME XXXII. — $\varphi(x, x')$ étant un intégrant de champ $H \subseteq \mathbb{E}_n$, continu en (x, x') , C_0 une courbe rectifiable intérieure à H, s sa représentation au moyen de l'abscisse curviligne λ :

a) une condition nécessaire — et suffisante si $\varphi \geq 0$ — pour que quelle que soit la suite de courbes $C_1, \dots, C_m, \dots$ de longueurs uniformément bornées convergeant vers C_0 , nous ayons

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \inf \lambda_\varphi(C_m) \geq \lambda_\varphi(C_0)$$

est que

$\mathfrak{P} \left\{ \begin{array}{l} \text{presque partout sur } C_0, \text{ c'est-à-dire, sauf au plus aux points} \\ s(\lambda) \text{ correspondant aux } \lambda \text{ d'un ensemble de mesure nulle,} \\ \text{la figurative en } p = s(\lambda) \text{ admette le long de la génératrice} \\ \text{correspondant à la direction d'une demi-tangente positive à} \\ C_0 \text{ en } p : s(\lambda) \text{ un plan d'appui positif (cf. 66, 256);} \end{array} \right.$

b) une condition nécessaire pour que, pour les mêmes suites $C_1, \dots, C_m, \dots$ nous ayons constamment

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_\varphi(C_m) = \lambda_\varphi(C_0)$$

est que $\varphi(x, x')$ soit linéaire en tous les points de C_0 (Cf. 66, 259);

c) si φ est positif, $\mathfrak{P}$ est une condition suffisante pour que λ_φ soit semi-continue inférieurement en C_0 ;

d) si C_0 vérifie $\mathfrak{P}$ et si presque partout sur C_0 , la figurative admet un plan d'appui positif strict, λ_φ est semi-continue inférieurement en C_0 (cf. 66, 288).

Les théorèmes XXXI et XXXII admettent des corrélatifs qui s'en déduisent par changement de φ en $-\varphi$.

5. THÉORÈMES D'EXISTENCE DES MINIMANTES
ET DES MAXIMANTES

$\mathcal{H}$ désignant un espace distancié, $\varphi(x; \vartheta)$ un intégrant de $\mathcal{H}$ au sens de Menger, $\mathfrak{C}$ une famille de courbes de $\mathcal{H}$ appartenant au domaine de définition de λ_φ , une courbe $\mathcal{C}'$ de $\mathfrak{C}$ pour laquelle

$$\lambda_\varphi(\mathcal{C}') = \text{borne inférieure de } \lambda_\varphi(\mathcal{C}) \\ \mathcal{C} \in \mathfrak{C}$$

est appelée une *minimante* de λ_φ sur $\mathfrak{C}$; une courbe $\mathcal{C}''$ de $\mathfrak{C}$ pour laquelle

$$\lambda_\varphi(\mathcal{C}'') = \text{borne supérieure de } \lambda_\varphi(\mathcal{C}) \\ \mathcal{C} \in \mathfrak{C}$$

est appelée une *maximante* de λ_φ sur $\mathfrak{C}$.

La question de l'existence de maximantes de λ_φ sur $\mathfrak{C}$ est corrélative de celle de l'existence de minimantes de λ_φ sur $\mathfrak{C}$ par changement de φ en $-\varphi$, aussi nous occupons-nous uniquement de la première; l'idée directrice de l'étude est la suivante: parmi les suites de courbes $\mathcal{C}'_1, \dots, \mathcal{C}'_m, \dots$, minimisantes pour λ_φ sur $\mathfrak{C}$, c'est-à-dire telles que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_\varphi(\mathcal{C}'_m) = \text{borne inférieure de } \lambda_\varphi(\mathcal{C}), \\ \mathcal{C} \in \mathfrak{C}$$

rechercher s'il en existe une convergeant vers une courbe $\mathcal{C}_0'$ de $\mathfrak{C}$ et si des propriétés de la fonctionnelle λ_φ , il résulte que

$$\lambda_\varphi(\mathcal{C}_0') = \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_\varphi(\mathcal{C}'_m).$$

1. Principe de Tonelli. — Le passage des théorèmes du § 2 sur l'existence et la semi-continuité inférieure de la fonctionnelle λ_φ à des théorèmes d'existence de minimantes sur certaines familles de courbes a lieu dans la théorie métrique comme dans la théorie de Tonelli par application du théorème d'Analyse Générale suivant, utilisé par Tonelli lorsque $\mathfrak{L}$ est une classe de courbes de $\mathcal{E}_2$, α la longueur, β la fonctionnelle de courbe du problème étudié (50, 12):

// THÉORÈME XXXIII (PRINCIPE DE TONELLI (50, 12)). — α
 // désignant une fonction attribuant à tout élément e d'une classe
 // limite $\mathfrak{L}$ (Déf. 21, 163) un nombre fini ou infini $\alpha(e)$, β une fonction

finie définie sur $\mathcal{L}[\alpha(e) < \infty]$ ⁽³⁶⁾, si pour chaque nombre fini $\rho \geq$ bornes inférieures de α et de β sont vérifiées les conditions suivantes :

- 1) l'ensemble $\mathcal{L}[\alpha(e) \leq \rho]$ ⁽³⁶⁾ est compact en soi,
- 2) β est semi-continue inférieurement sur $\mathcal{L}[\alpha(e) \leq \rho]$ ⁽³⁶⁾,
- 3) α est bornée supérieurement sur $\mathcal{L}[\beta(e) \leq \rho]$ ⁽³⁶⁾,

alors :

tout sous-ensemble fermé A de $\mathcal{L}[\alpha(e) < \infty]$ ⁽³⁶⁾, non vide, contient au moins un élément e_A qui est limite d'une suite minimisante de β sur A ; un tel élément est minimant de β sur A .

$\varphi(x; \varepsilon)$ étant un intégrant au sens de Menger de l'espace distancié $\mathcal{H}$, nous utilisons le théorème précédent dans le cas où $\mathcal{L}$ est la classe des courbes de $\mathcal{H}$, α la longueur, β la φ -longueur ; la condition 1) est toujours vérifiée lorsque $\mathcal{H}$ est compact en soi, ce qu'exprime le

XXXIV. THÉORÈME DE HILBERT, LEBESGUE ET CARATHEODORY. — La famille des courbes d'un espace distancié compact dont la longueur est $\leq$ nombre positif fixe, est compacte en soi.

Sous les hypothèses intervenant dans l'énoncé du théorème XV, à savoir

$\mathfrak{S}_1$ φ est borné sur tout ensemble compact en soi de $\mathcal{H}$,

$\mathfrak{S}_2$ φ est continu vis-à-vis de x uniformément par rapport à ε ,

$\mathfrak{S}_3$ φ est quasi-régulier au sens de Menger,

d'après les théorèmes XV et XII, λ_φ est définie et finie sur les courbes rectifiables de $\mathcal{H}$ et la condition 2) est vérifiée.

Quant à la condition 3), nous la désignons désormais par

$\mathfrak{R}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{quel que soit le nombre fini } \rho, \text{ la longueur des courbes recti-} \\ \text{fiables } \mathcal{C} \text{ de } \mathcal{H} \text{ telles que } \lambda_\varphi(\mathcal{C}) \text{ soit } \leq \rho \text{ est bornée.} \end{array} \right.$

La condition $\mathfrak{R}$ n'est pas une conséquence de $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ et $\mathfrak{S}_3$; si en effet $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$, et $\mathfrak{R}$ sont satisfaites, pour toute courbe fermée $\mathcal{B}$ de $\mathcal{H}$ rectifiable et ne se réduisant pas à un point, $\lambda_\varphi(\mathcal{B})$ est > 0 ; or dans l'exemple de M. Tonelli en (66, 244) il s'agit d'un intégrant de $\mathcal{E}_2$ continu et quasi-régulier et cependant la valeur de λ_φ sur les courbes fermées qu'il nomme $\mathcal{C}_\delta$, $\delta > 0$, et qui ne sont pas réduites à un point est < 0 .

⁽³⁶⁾ Notation de M. Lebesgue, ainsi $\mathcal{L}[\alpha(e) < \infty]$ = ensemble des éléments e de $\mathcal{L}$ vérifiant $\alpha(e) < \infty$.

Le principe de Tonelli nous permet d'énoncer le théorème d'existence suivant

THÉORÈME XXXV (Menger). — $\mathcal{H}$ étant un espace distancié compact, $\varphi(x; \varepsilon)$ un intégrant mengerien de champ $\mathcal{H}$ satisfaisant à $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$ et $\mathfrak{R}$, toute famille $\mathfrak{C}$ fermée de courbes rectifiables de $\mathcal{H}$ contient une minimante de λ_φ sur elle.

L'énoncé du théorème XII fait intervenir l'hypothèse :

$$\Omega_+ \left\{ \begin{array}{l} \text{il existe pour tout ensemble } K \text{ de } \mathcal{H} \text{ compact en soi deux nom-} \\ \text{bres positifs } \omega \text{ et } \rho, \text{ tels que, quel que soit le polygone } P \text{ de } K, \\ \text{fermé et de diamètre } \leq \rho, \lambda_\varphi(P) \text{ soit } \geq \omega \lambda(P). \end{array} \right.$$

Du théorème XII et du principe de Tonelli résulte le

THÉORÈME XXXVI (Menger). — $\mathcal{H}$ étant un espace distancié compact, $\varphi(x; \varepsilon)$ un intégrant mengerien de champ $\mathcal{H}$ satisfaisant à $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$, Ω_+ et $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{C}$ une famille fermée quelconque de courbes de $\mathcal{H}$, il existe toujours dans $\mathfrak{C}$ une minimante de λ_φ sur $\mathfrak{C}$ laquelle est rectifiable pourvu que $\mathfrak{C}$ contienne au moins une courbe rectifiable.

Un exemple dû à Hahn (28, 445) montre que les hypothèses $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$ et Ω_+ peuvent être satisfaites sans que $\mathfrak{R}$ le soit ; nous avons cependant le

THÉORÈME XXXVII (Hahn, Tonelli) (50, 27). — L'espace $\mathcal{H}$ étant supposé compact et les hypothèses $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$ et Ω_+ satisfaites, les conditions $\mathfrak{R}$ et

$\mathfrak{R}_0 \left\{ \begin{array}{l} \text{la longueur des courbes rectifiables } C \text{ de } \mathcal{H} \text{ telles que } \lambda_\varphi(C) \\ \text{soit } \leq 0 \text{ est bornée} \end{array} \right.$
sont équivalentes.

Par conséquent, dans l'énoncé du théorème XXXVI, nous pouvons substituer $\mathfrak{R}_0$ à $\mathfrak{R}$.

Les théorèmes XXXV et XXXVI fournissent dans les espaces euclidiens, si nous tenons compte des résultats du § 2, 2, le

THÉORÈME XXXVIII (Menger). — $\varphi(x, x')$ étant un intégrant de champ borné et fermé $H \subseteq \mathcal{E}_n$ ⁽³⁷⁾, continu en (x, x') , quasi-régulier et vérifiant $\mathfrak{R}$:

⁽³⁷⁾ Le champ de définition de φ peut fort bien ne pas être borné et fermé, il est souvent l'espace $\mathcal{E}_n$ entier, mais comme la famille de courbes parmi lesquelles on recherche une minimante est habituellement une famille de courbes situées sur un ensemble borné et fermé, nous limitons le champ de définition de φ à ce dernier ensemble, ce qui ne change rien au problème étudié.

// toute famille fermée de courbes rectifiables de $\mathcal{E}_n$ situées sur H
 // contient une minimante de λ_φ (sur elle),
 // toute famille fermée de courbes quelconques de $\mathcal{E}_n$ situées sur
 // un sous-ensemble fermé de H sur lequel la fonction χ reste > 0 , con-
 // tient une minimante de λ_φ (sur elle).

Nous n'indiquons pas d'autres théorèmes d'existence, nous contentant de renvoyer à 67, Chapitre I, car dans cette étude la méthode métrique emprunte les procédés de la méthode de Tonelli ; en particulier la vérification de la condition $\mathfrak{N}$ se fait habituellement en montrant qu'il existe une fonction γ définie, finie et continue sur l'ensemble des nombres finis, non négative et non décroissante telle que pour toute courbe rectifiable c de $\mathcal{H}$

$$\lambda(c) \leq \gamma(\lambda_\varphi(c)) \quad (67,5) ;$$

c'est ainsi que $\varphi(x, x')$ étant un intégrant de champ borné et fermé $H \subseteq \mathcal{E}_n$ (³⁷) continu en (x, x') , $\mathfrak{N}$ est satisfaite par exemple, dans les cas suivants :

φ est > 0 , quasi-régulier (67, 10) ;

φ est ≥ 0 , quasi-régulier, la fonction χ est > 0 (sur H), les points de H où φ n'est pas > 0 sont en nombre fini (67, 12).

Un théorème d'existence locale de minimantes (cf. 67, 78) résulte d'après ce qui précède de la proposition suivante :

si φ est un intégrant de champ H continu et quasi-régulier, en un point p non exceptionnel, il existe un voisinage fermé $W(p)$ de p dans H et deux nombres positifs α et β tels que pour toute courbe rectifiable C située sur $W(p)$

$$\lambda(C) \leq \alpha \cdot \lambda_\varphi(C) + \beta.$$

L'exemple de Hahn en (28, 446) montre que cette affirmation peut être inexacte si p est un point exceptionnel.

Signalons qu'une conséquence du théorème XXXI est la suivante : $\varphi(x, x')$ étant un intégrant continu en (x, x') de champ $\mathcal{E}_n$, a et b deux points distincts de $\mathcal{E}_n$, $\mathfrak{C}_{ab}$ la famille des courbes rectifiables de $\mathcal{E}_n$ ayant a comme point initial et b comme point final, $\mathfrak{C}_{ab}^1$ la famille des courbes de $\mathcal{E}_n$ à tangente continue partant de a pour arriver en b

$$\text{borne inf. de } \lambda_\varphi \text{ sur } \mathfrak{C}_{ab} = \text{borne inf. de } \lambda_\varphi \text{ sur } \mathfrak{C}_{ab}^1.$$

Si la théorie classique qui fait intervenir la famille $\mathfrak{C}_{ab}^1$ a fourni

une minimante de λ_φ relativement à $\mathfrak{C}_{ab}^1$, nous pouvons affirmer que cette courbe est une minimante de λ_φ relativement à la famille $\mathfrak{C}_{ab}$; l'intérêt de faire intervenir des courbes rectifiables quelconques apparaît dans le cas où la borne inférieure de λ_φ sur $\mathfrak{C}_{ab}^1$ est atteinte par une courbe de $\mathfrak{C}_{ab}$ qui n'est pas à tangente continue.

2. Hypothèse concernant $\mathfrak{C}$. Arcs comme minimantes. — Dans les problèmes classiques la famille $\mathfrak{C}$ des courbes de comparaison est constituée par les courbes rectifiables de $\mathcal{H}$ joignant deux points de $\mathcal{H}$, plus généralement deux ensembles de $\mathcal{H}$; elle vérifie par conséquent l'hypothèse suivante

$\Gamma \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{C} \text{ appartenant à } \mathfrak{C}, \text{ toute courbe obtenue à partir de } \mathcal{C} \text{ en} \\ \text{en parcourant une boucle une seconde fois, ou au contraire} \\ \text{en en supprimant une boucle appartient encore à } \mathfrak{C}. \end{array} \right.$

THÉORÈME XXXIX. — φ étant un intégrant mengerien de l'espace distancié $\mathcal{H}$, $\mathfrak{C}$ une famille de courbes de $\mathcal{H}$ faisant partie du domaine de définition de λ_φ et satisfaisant à Γ , $\mathcal{C}$ une minimante (ou maximante) de λ_φ relativement à $\mathfrak{C}$ et telle que $\lambda_\varphi(\mathcal{C})$ soit finie, alors

$$\text{pour toute boucle } \mathfrak{B} \text{ de } \mathfrak{C} \quad \lambda_\varphi(\mathfrak{B}) = 0.$$

Conséquences : 1) pour toute sous-courbe élémentaire confinale de $\mathcal{C}$ soit $\mathcal{C}_e^*$

$$\lambda_\varphi(\mathcal{C}_e^*) = \lambda_\varphi(\mathcal{C});$$

2) si nous savons de l'intégrant φ que la φ -longueur d'une courbe fermée de $\mathcal{H}$ non réduite à un point ne peut être $= 0$, nous pouvons affirmer que $\mathcal{C}$ est un arc; ainsi, à cause de $\mathfrak{R}$, les minimantes rectifiables dont les théorèmes XXXV et XXXVI nous garantissent l'existence, sont *nécessairement* des arcs;

3) si $\mathfrak{C}$ est fermée et φ borné sur $\mathcal{C}$, toute sous-courbe $\mathcal{C}^*$ de $\mathcal{C}$ est φ -rectifiable et $\lambda_\varphi(\mathcal{C}^*) = \lambda_\varphi(\mathcal{C})$; par conséquent, en vertu du théorème VI, $\mathcal{C}$ admet comme sous-courbe un arc qui est aussi une minimante (ou maximante) (cf. 50, 24).

6. LE CAS ORDINAIRE DU CALCUL DES VARIATIONS

Nous avons traité jusqu'à présent le cas dit paramétrique du Calcul des Variations ; il peut arriver que, par la nature même du problème (Cf. problème de la brachistochrone, 7, 5) dans l'espace $\mathcal{E}_n$, $n > 1$, les courbes de comparaison se laissent toutes représenter sous la forme

$$\xi_2 = \xi_2(\xi_1), \dots, \xi_n = \xi_n(\xi_1) \quad \alpha \leq \xi_1 \leq \beta,$$

ou bien (Cf. problème de la surface de révolution d'aire minima, 7, 1) que nous soyons assurés que la minimante est une courbe de ce type ; il est alors intéressant de poser le problème sous forme ordinaire.

1. Le cas ordinaire dans la théorie de Tonelli (66, chapitre 9). — Voici les définitions habituelles relatives au cas ordinaire :

un intégrant ordinaire dans $\mathcal{E}_n$ est une fonction $\varphi(\xi_1, \dots, \xi_n, \xi_2', \dots, \xi_n')$ définie et finie pour les $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ d'un ensemble H de $\mathcal{E}_n$ dit champ de φ et en chaque point de H , quels que soient $\xi_2', \dots, \xi_n'$ finis ;

une courbe ordinaire $\mathcal{C}$ de $\mathcal{E}_n$ est une courbe coupée par tout plan $\xi_1 = \text{constante}$, en un point au plus ⁽³⁸⁾, c'est-à-dire encore représentable sous la forme indiquée plus haut ;

quant à la fonctionnelle, Tonelli la définit (66, 360) sur une courbe ordinaire située dans le champ H comme l'intégrale de Lebesgue

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(\xi_1, \xi_2(\xi_1), \dots, \xi_n(\xi_1), \frac{d}{d\xi_1} \xi_2(\xi_1), \dots, \frac{d}{d\xi_1} \xi_n(\xi_1)) \cdot d\xi_1;$$

Tonelli impose aux courbes ordinaires d'être situées dans le champ de l'intégrant, d'être absolument continues, c'est-à-dire telles que les fonctions $\xi_1, \dots, \xi_n$ soient absolument continues et en outre d'assurer l'existence de l'intégrale précédente (66, 350).

Bien que le cas ordinaire soit dans un sens plus aisé à étudier que le cas paramétrique puisqu'une courbe ordinaire de $\mathcal{E}_n$ est

⁽³⁸⁾ Les définitions dans ce chapitre sont relatives à un système d'axes rectangulaires fixé dans $\mathcal{E}_n$.

définie sans arbitraire par $(n - 1)$ fonctions, il présente cependant plus de difficultés dès qu'il s'agit d'établir des théorèmes d'existence, la raison principale étant que l'intégrant φ n'est, même dans les cas les plus simples, pas nécessairement borné sur toute courbe ordinaire de son champ ; c'est par exemple le cas de l'intégrant ordinaire de $\mathcal{E}_2$

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_2') = \sqrt{1 + \xi_2'^2}$$

qui correspond à la longueur d'une courbe ; dans le cas paramétrique, si nous nous reportons à la définition de l'intégrale de Lebesgue-Tonelli, nous voyons qu'en choisissant comme paramètre de la courbe rectifiable, l'abscisse curviligne, l'intégrant qui intervient est $\varphi(x; s)$ lequel sous l'hypothèse de continuité est borné sur tout ensemble fermé et borné de $\mathcal{E}_n$, tandis que dans le cas ordinaire le paramètre est imposé, c'est l'abscisse ξ_1 , aussi une difficulté essentielle du cas ordinaire réside-t-elle dans la définition de la fonctionnelle de courbe :

1) la continuité de l'intégrant φ n'assure pas l'existence de cette fonctionnelle sur une courbe ordinaire de son champ rectifiable ou même absolument continue ;

2) si nous ne nous limitons pas à des courbes de comparaison ordinaires absolument continues, acceptant des courbes ordinaires rectifiables quelconques, il se produit un phénomène que l'exemple suivant fait aisément comprendre :

si $\mathcal{C}$ est une courbe du plan des (ξ_1, ξ_2) définie par

$$\xi_2 = \xi_2(\xi_1), \quad \alpha \leq \xi_1 \leq \beta,$$

la fonction ξ_2 étant à variation bornée, l'intégrale de Lebesgue

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + \left(\frac{d}{d\xi_1} \xi_2(\xi_1) \right)^2} \cdot d\xi_1$$

existe, mais elle ne représente la longueur $\lambda(\mathcal{C})$ que lorsque la fonction ξ_2 est absolument continue (cf. 62), sans cette restriction, elle perd sa signification géométrique. Le problème de trouver les courbes ordinaires rectifiables

$$\xi_2 = \xi_2(\xi_1), \quad 0 \leq \xi_1 \leq 1 \quad \text{avec} \quad \xi_2(0) = 0, \quad \xi_2(1) = 1,$$

rendant minimum l'intégrale précédente, admet comme solutions les courbes pour lesquelles la dérivée $\frac{d}{d\xi_1} \xi_2(\xi_1)$ est nulle presque

partout ; sur ces courbes, l'intégrale a la valeur 1 ; ce problème d'analyse est distinct du problème géométrique, qui consiste à chercher les courbes ordinaires de longueur minimum joignant les points (0,0) et (1,1).

Lorsqu'un problème de Calcul des Variations d'origine géométrique ou mécanique a été mis sous forme ordinaire, cette traduction analytique ne sera pas en général fidèle ; il faudra introduire des restrictions ; signalons à ce propos que M. Tonelli, pour traiter le problème de la brachistochrone (67, 405) ou celui de la surface de révolution d'aire minimum (67, 416) utilise la forme paramétrique.

Quand un problème de Calcul des Variations est posé directement sous forme ordinaire, un procédé pour le traiter consiste à le transformer en un problème sous forme paramétrique ; l'idée de mettre sous forme paramétrique est due à M. Mac Shane (cf. 37, 38) ; elle a été retrouvée indépendamment par M. Aronszajn qui l'a posée comme point de départ de l'étude du cas ordinaire dans la méthode métrique (5).

2. La fonctionnelle de courbe du cas ordinaire dans la méthode métrique. — Considérons un intégrant ordinaire $\varphi(\xi_1, \dots, \xi_n, \xi_2', \dots, \xi_n')$ de champ $H \subseteq \mathcal{E}_n$; $\mathcal{C}$ étant une courbe ordinaire située sur H

$$\xi_j = \xi_j(\xi_1), \quad j = 2, \dots, n \quad \alpha \leq \xi_1 \leq \beta,$$

la longueur généralisée de cette courbe relativement à φ se présente naturellement comme la longueur de cette courbe dans l'espace métrique dont les points sont ceux de H et où pour deux d'entre eux

$$x_1 = (\xi_1^{(1)}, \dots, \xi_n^{(1)}), \quad x_2 = (\xi_1^{(2)}, \dots, \xi_n^{(2)}),$$

l'écart

$$\delta_\varphi(x_1 x_2) = \varphi \left(\xi_1^{(1)}, \dots, \xi_n^{(1)}, \frac{\xi_2^{(2)} - \xi_2^{(1)}}{\xi_1^{(2)} - \xi_1^{(1)}}, \dots, \frac{\xi_n^{(2)} - \xi_n^{(1)}}{\xi_1^{(2)} - \xi_1^{(1)}} \right) \cdot (\xi_1^{(2)} - \xi_1^{(1)})$$

lorsque $\xi_1^{(2)} > \xi_1^{(1)}$; nous n'avons pas besoin d'indiquer ce que nous entendons par $\delta_\varphi(x_1 x_2)$ lorsque $\xi_1^{(2)} \leq \xi_1^{(1)}$ pour définir $\underline{\lambda}_\varphi(\mathcal{C})$, $\overline{\lambda}_\varphi(\mathcal{C})$ et $\lambda_\varphi(\mathcal{C})$; c'est la fonctionnelle λ_φ définie sur une famille de courbes ordinaires de $\mathcal{E}_n$ que nous prenons comme fonctionnelle de courbe dans la théorie métrique du cas ordinaire.

2.4. *L'intégrant paramétrique et la fonctionnelle auxiliaire.* —

Si nous cherchons à associer à φ un intégrant paramétrique φ^* de telle manière que la longueur généralisée de toute courbe ordinaire située sur H soit la même suivant φ et suivant φ^* , nous sommes conduits à poser avec MM. Mac Shane et Aronszajn

$$(a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{en tout point } x = (\xi_1, \dots, \xi_n) \text{ de } H \\ \varphi^*(\xi_1, \dots, \xi_n, \xi'_1, \dots, \xi'_n) = \varphi\left(\xi_1, \dots, \xi_n, \frac{\xi'_1}{\xi_1}, \dots, \frac{\xi'_n}{\xi_n}\right) \cdot \xi'_1 \\ \text{quels que soient } \xi'_1, \dots, \xi'_n \text{ finis avec } \xi'_1 > 0. \end{array} \right.$$

Remarquons alors que, l'intégrant φ étant supposé dorénavant continu par rapport à l'ensemble de ses arguments :

1) l'intégrant $\varphi^*(x; \varpi)$ pour les directions ϖ , nommons les ϖ^+ où il est défini jusqu'à présent, n'est pas nécessairement borné ;

2) ϖ^0 désignant une direction du plan (de la droite si $n = 2$) $\xi_1 = 0$, $\varphi^*(x; \varpi^+)$ ne possède pas nécessairement une limite lorsque $x \rightarrow x_0$ sur H , $\varpi^+ \rightarrow \varpi^0$;

nous n'avons donc pas toujours l'espoir de prolonger $\varphi^*(x; \varpi)$ sur toutes les directions de $\mathcal{E}_n$ en un intégrant continu et borné. D'autre part, supposant désormais qu'il s'agisse d'un problème de recherche de minimantes, il est essentiel que la définition de $\varphi^*(x; \varpi)$ pour les directions ϖ^- opposées aux ϖ^+ et les directions ϖ^0 , soit telle que les courbes non ordinaires que va faire entrer en jeu le traitement paramétrique soient autant que possible éliminées d'emblée.

Nous posons avec M. Aronszajn (3) en tout point $x_0 = (\xi_1^{(0)}, \dots, \xi_n^{(0)})$ de H

$$\varphi^*(x_0; \varpi^-) = +\infty$$

$$\varphi^*(x_0; \varpi^0) = \liminf \varphi^*(x; \varpi^+) \quad \text{pour} \quad \varpi^+ \rightarrow \varpi^0, x \rightarrow x_0 \text{ sur } H.$$

ou encore, ce qui est équivalent

$$(b) \quad \varphi^*(\xi_1^{(0)}, \dots, \xi_n^{(0)}, \xi'_1, \dots, \xi'_n) = +\infty \quad \text{pour} \quad \xi'_1 < 0$$

$$(c) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi^*(\xi_1^{(0)}, \dots, \xi_n^{(0)}, \xi'_1, \dots, \xi'_n) = \liminf \varphi^*(\xi_1, \dots, \xi_n, \xi'_1, \dots, \xi'_n) \\ \text{pour } (\xi_1, \dots, \xi_n) \rightarrow (\xi_1^{(0)}, \dots, \xi_n^{(0)}), \\ \quad (\xi'_1, \dots, \xi'_n) \rightarrow (\xi'_1, \dots, \xi'_n) \text{ avec } \xi'_1 > 0 \\ \text{lorsque } \xi'_1 = 0, (\xi'_2, \dots, \xi'_n) \neq (0, \dots, 0); \end{array} \right.$$

φ^* n'est pas un intégrant paramétrique de type habituel puisqu'il

n'est pas fini ; à cause de (c) il est semi-continu inférieurement ; pour deux points distincts de H, $y = (y_1, \dots, y_n)$, $z = (z_1, \dots, z_n)$

$$\delta_{\varphi^*}(yz) = \varphi^*(y; \varpi_{yz}) \cdot \delta(yz) = \varphi^*(y_1, \dots, y_n, \xi_1 - y_1, \dots, \xi_n - y_n)$$

peut prendre les valeurs $+\infty$ et $-\infty$; nous ne pouvons donc parler de $\lambda_{\varphi^*}(P)$ pour un polygone P quelconque de H que si $\delta_{\varphi^*}(yz)$ ne prend jamais la valeur $-\infty$, c'est-à-dire si la condition suivante est vérifiée

G) $\varphi^*(x, x') > -\infty$ quel que soit x dans H et le vecteur x' de $\mathcal{E}_n$ non nul,

condition qui s'exprime au moyen de φ par

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{quel que soit le point } x_0 \text{ de H, il existe un } \varepsilon > 0, \text{ un } \mu > -\infty \\ \text{et un } \nu > -\infty \text{ tels que } x = (\xi_1, \dots, \xi_n) \text{ représentant le} \\ \text{point courant de H} \\ (\delta(xx_0) \leq \varepsilon) \rightarrow (\varphi(\xi_1, \dots, \xi_n, \xi'_1, \dots, \xi'_n) \geq \mu + \nu \sqrt{\xi'^2_1 + \dots + \xi'^2_n}) \\ \text{quels que soient } \xi'_1, \dots, \xi'_n \text{ finis).} \end{array} \right.$$

G n'est, par exemple, pas vérifiée pour l'intégrant ordinaire de $\mathcal{E}_2$

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, \xi'_2) = \xi'^3_2.$$

Cette condition G admise une fois pour toutes, si nous convenons que pour $y = z$, $\delta_{\varphi^*}(yz) = 0$ ⁽³⁹⁾, les définitions de λ_{φ^*} , $\bar{\lambda}_{\varphi^*}$, λ_{φ^*} données dans le cas d'un intégrant paramétrique φ^* borné sont applicables et il est clair que pour une courbe située sur H

$$\mathcal{C}: \quad \xi_1 = \xi_1(\tau), \dots, \xi_n = \xi_n(\tau) \quad \alpha \leq \tau \leq \beta$$

si ξ_1 n'est pas une fonction non décroissante de τ , $\lambda_{\varphi^*}(\mathcal{C}) = +\infty$; nous appelons avec M. Aronszajn *courbes ordinaires au sens large* les courbes $\mathcal{C}: \xi_i = \xi_i(\tau)$, $i = 1, \dots, n$, $\alpha \leq \tau \leq \beta$, de $\mathcal{E}_n$ telles que ξ_1 soit une fonction non décroissante de τ ; ce sont donc les courbes de $\mathcal{E}_n$ coupées par tout plan $\xi_1 = \text{constante}$ suivant un segment (Kurvenabschnitt) ⁽⁴⁰⁾ ; les courbes ordinaires sont caractérisées par la propriété que, si la représentation est propre, ξ_1 est une fonction croissante de τ ; la famille des courbes

⁽³⁹⁾ $\varphi^*(x, 0)$ n'a pas été défini mais nous pouvons le poser $= 0$.

⁽⁴⁰⁾ Il s'agit toujours d'un segment orienté de droite si $n = 2$; remarquons que, à l'exception au plus d'une infinité dénombrable de plans $\xi_1 = \text{cte}$, l'intersection avec $\mathcal{C}$ se réduit à un point.

ordinaires au sens large de $\mathcal{E}_n$ est la fermeture de la famille des courbes ordinaires de $\mathcal{E}_n$. Du point de vue de la recherche de minimantes de λ_{φ^*} sur une famille de courbes situées sur H , ne présentent de l'intérêt que les courbes ordinaires au sens large de H .

Nous définissons la figurative $S_{\varphi^*x_0}$ de φ^* en un point x_0 de H , après avoir assimilé $\mathcal{E}_n$ à la variété $\xi_{n+1} = 0$ de $\mathcal{E}_{n+1}$, comme le lieu des rayons $T_{x_0\varepsilon}$ correspondants aux diverses directions ε de $\mathcal{E}_n$ de la façon suivante :

si $\varphi^*(x_0; \varepsilon) \neq +\infty$, $(\xi'_1, \dots, \xi'_n)$ désignant un système de paramètres directeurs de ε dans $\mathcal{E}_n$, $T_{x_0\varepsilon}$ est le rayon issu de x_0 de paramètres directeurs $\xi'_1, \dots, \xi'_n$, $\varphi^*(x_0, \xi'_1, \dots, \xi'_n)$,

si $\varphi^*(x_0; \varepsilon) = +\infty$, $T_{x_0\varepsilon}$ est le rayon issu de x_0 dont la direction est la direction positive de l'axe des ξ_{n+1} .

Exemple :

$$n = 2, \quad \varphi(\xi_1, \xi_2, \xi'_2) = \sqrt{1 + \xi'^2_2},$$

$\varphi^*(\xi_1, \xi_2, \xi'_1, \xi'_2) = \sqrt{\xi'^2_1 + \xi'^2_2}$ si $\xi'_1 \geq 0$, $= +\infty$ si $\xi'_1 < 0$ ⁽⁴¹⁾ ; en un point $x_0 = (\xi^{(0)}_1, \xi^{(0)}_2)$ de $\mathcal{E}_2$, $S_{\varphi^*x_0}$ est constituée par le demi-cône de révolution

$$\xi_3 = \sqrt{(\xi_1 - \xi^{(0)}_1)^2 + (\xi_2 - \xi^{(0)}_2)^2}, \quad \xi_1 \geq \xi^{(0)}_1$$

et le rayon issu de x_0 dont la direction est la direction positive de l'axe des ξ_3 .

φ^* étant en général seulement semi-continu inférieurement, nous avons intérêt à introduire le cône positif d'étalonnage $C_{\varphi^*x_0}$ (Cf. § 3, 1.12) défini par

$$\xi_{n+1} \geq \varphi^*(\xi^{(0)}_1, \dots, \xi^{(0)}_n, \xi_1 - \xi^{(0)}_1, \dots, \xi_n - \xi^{(0)}_n)$$

en convenant que $\varphi^*(x_0, 0) = 0$; $C_{\varphi^*x_0}$ est fermé.

En résumé, nous avons associé de manière adéquate au problème posé sous forme ordinaire un intégrant paramétrique φ^* , mais cet intégrant ne rentre pas dans la catégorie des intégrants para-

(41) Nous remarquons ici qu'un problème de forme paramétrique à intégrant fini et continu, ayant été mis sous forme ordinaire, l'intégrant φ^* n'est pas l'intégrant paramétrique de départ, mais les longueurs généralisées des courbes ordinaires au sens large sont les mêmes avec l'un ou l'autre de ces intégrants paramétriques.

métriques étudiés dans les chapitres précédents ; en vue d'utiliser les résultats de cette étude, nous allons avec M. Aronszajn, *définir pour tout intégrant paramétrique $\varphi^*(x, x')$ semi-continu inférieurement, non nécessairement fini mais ne prenant jamais la valeur $-\infty$, une fonctionnelle μ_{φ^*} définie sur les courbes rectifiables $\mathcal{C}$ situées sur son champ H de la façon suivante :*

soit $\varphi_1^*, \dots, \varphi_m^*, \dots$ une suite non décroissante d'intégrants finis et continus convergeant vers φ^* ; une telle suite existe certainement d'après nos hypothèses sur φ^* ; $\mathcal{C}$ étant une courbe rectifiable, en vertu du théorème XXX, $\lambda_{\varphi_m^*}$ est définie quel que soit $m = 1, 2, \dots$, et $\lambda_{\varphi_1^*}(\mathcal{C}) \leq \lambda_{\varphi_2^*}(\mathcal{C}) \leq \dots$; nous pouvons introduire $\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_{\varphi_m^*}(\mathcal{C})$; M. Aronszajn a démontré que cette limite est indépendante de la suite non décroissante d'intégrants finis et continus convergeant vers φ^* ; c'est elle que nous désignons par $\mu_{\varphi^*}(\mathcal{C})$.

THÉORÈMES (42). — $\varphi^*(x, x')$ étant un intégrant paramétrique de champ $H \subseteq \mathbb{E}_n$ avec $-\infty < \varphi^*(x, x') \leq +\infty$, semi-continu inférieurement :

XL. — Si s désigne la représentation paramétrique d'une courbe rectifiable $\mathcal{C}$ située sur H , au moyen de l'abscisse curviligne λ , l'intégrale de Lebesgue

$$\int_0^{\lambda(\mathcal{C})} \varphi^*(s(\lambda), \frac{d}{d\lambda} s(\lambda)) \cdot d\lambda \text{ existe } (43) \text{ et } = \mu_{\varphi^*}(\mathcal{C}) ;$$

si $\varphi^*(x ; \varpi)$ est borné $\mu_{\varphi^*}(\mathcal{C}) = \underline{\lambda}_{\varphi^*}(\mathcal{C})$.

XLI. — $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_m, \dots$ étant des courbes rectifiables situées sur H

$(\lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{C}_m = \mathcal{C}_0) \text{ et } (\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda(\mathcal{C}_m) = \lambda(\mathcal{C}_0)) \rightarrow (\mu_{\varphi^*}(\mathcal{C}_0) \leq \liminf (44) \mu_{\varphi^*}(\mathcal{C}_m)).$

(42) Ces théorèmes comme tous ceux du chapitre 6 sont dus à M. Aronszajn (5).

(43) Ayant éventuellement la valeur $+\infty$. Cette intégrale peut être exprimée par l'intermédiaire de toute représentation paramétrique de $\mathcal{C}$ absolument continue (§ 4, 1).

(44) Le signe $<$ peut effectivement se présenter : considérons en effet avec M. Mania (40, 147-153) l'intégrant du plan

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, \xi'_2) = (\xi_2^3 - \xi_1^2) \cdot \xi_2'^{2\nu}$$

2.2. *Relations entre la fonctionnelle auxiliaire μ_{φ^*} , l'intégrale de Lebesgue de φ et la φ -longueur.* — Nous supposons désormais que φ^* représente l'intégrant paramétrique associé à l'intégrant ordinaire continu φ de champ H , μ_{φ^*} est alors la fonctionnelle du problème paramétrique associé au problème ordinaire ; elle prend la valeur $+\infty$ sur les courbes rectifiables situées sur H qui ne sont pas ordinaires au sens large.

XLII. — THÉORÈME D'ÉQUIVALENCE D'ARONSZAJN. — *Pour une courbe ordinaire absolument continue*

$$C: \quad \xi_2 = \xi_2(\xi_1), \dots, \xi_n = \xi_n(\xi_1) \quad \alpha \leq \xi_1 \leq \beta$$

située dans le champ H de l'intégrant ordinaire continu φ , la fonctionnelle $\mu_{\varphi^}(C)$ est égale à l'intégrale ordinaire au sens de Lebesgue*

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(\xi_1, \xi_2(\xi_1), \dots, \xi_n(\xi_1), \frac{d}{d\xi_1} \xi_2(\xi_1), \dots, \frac{d}{d\xi_1} \xi_n(\xi_1)) \cdot d\xi_1.$$

En général, cette égalité n'a lieu que pour des courbes ordinaires absolument continues ; toutefois ce champ de validité nous suffit

et la courbe ordinaire absolument continue

$$C_0: \quad \xi_2 = \sqrt{\xi_1} \quad 0 \leq \xi_1 \leq 1;$$

sur les courbes ordinaires absolument continues la fonctionnelle μ_{φ^*} coïncide d'après le théorème XLII avec la fonctionnelle de Tonelli, par conséquent si $C_1, \dots, C_m \dots$ désigne une suite quelconque de courbes ordinaires du plan joignant les points $(0,0)$ et $(1,1)$ de la classe 1 de Tonelli, c'est-à-dire admettant une tangente continue non verticale, il résulte de l'étude de M. Mania que

$$\mu_{\varphi^*}(C_0) < \liminf_{m \rightarrow \infty} \mu_{\varphi^*}(C_m).$$

C'est d'ailleurs cette inégalité qui constitue le phénomène de Lavrentieff (Cf. 35, 23-28) de l'exemple ; ce phénomène sous la forme que lui a donnée M. Mania s'énonce ainsi : la valeur d'une intégrale $\int \varphi(\xi_1, \xi_2, \xi'_2) \cdot d\xi_1$ calculée sur une courbe absolument continue ne peut pas toujours s'approcher au moyen des valeurs de la même intégrale calculée sur les courbes de classe 1.

Quand le théorème de convergence est applicable il ne peut y avoir phénomène de Lavrentieff, car pour toute courbe ordinaire C_0^* absolument continue intérieure au champ H de l'intégrant, il existe une suite $C_1^*, \dots, C_m^*, \dots$ de courbes ordinaires de classe 1 situées sur H vérifiant

$$\lim_{m \rightarrow \infty} C_m^* = C_0^* \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda(C_m^*) = C_0^*.$$

pour que des théorèmes sur la semi-continuité inférieure de μ_{φ^*} qui vont suivre, nous puissions déduire les théorèmes de Tonelli sur la semi-continuité inférieure de l'intégrale de Lebesgue de φ , puisque Tonelli s'est limité à la considération de courbes ordinaires absolument continues.

Quant à la φ^* -longueur d'une courbe C rectifiable située dans H , nous pouvons affirmer son existence et sa coïncidence avec $\mu_{\varphi^*}(C)$ dans les cas suivants :

A) $\varphi^*(x, x')$ est continu et fini pour x parcourant H et x' l'ensemble des vecteurs de E_n dont la première composante est ≥ 0 ;

B) $\varphi^*(x, x')$ est fini dans les mêmes conditions ; la courbe C est ordinaire et absolument continue ;

C) φ est un intégrant ordinaire continu quelconque ; C est une courbe ordinaire dont les cordes dirigées dans le sens de son parcours font avec l'axe des ξ_1 un angle compris entre $-\frac{\pi}{2} + \varepsilon_0$ et $\frac{\pi}{2} - \varepsilon_0$ pour un $\varepsilon_0 > 0$.

Si nous tenons compte que pour les courbes ordinaires les définitions de λ_{φ^*} et λ_{φ} se confondent, nous avons là des *théorèmes d'existence de λ_{φ}* sur les courbes ordinaires situées dans H .

3. Etude de la fonctionnelle μ_{φ^*} lorsque φ est continu et quasi-régulier. — Supposons maintenant que φ soit quasi-régulier entendant par là que pour $x_0 = (\xi_1^{(0)}, \dots, \xi_n^{(0)})$ fixe quelconque dans le champ H de φ , la fonction $\varphi(\xi_1^{(0)}, \dots, \xi_n^{(0)}, \xi'_2, \dots, \xi'_n)$ soit convexe en $\xi'_2, \dots, \xi'_n$, alors :

1) pour $x_0 = (\xi_1^{(0)}, \dots, \xi_n^{(0)})$, $x'_0 =$ vecteur de composantes $\xi'_1{}^{(0)} = 0, \xi'_2{}^{(0)}, \dots, \xi'_n{}^{(0)}$,

$$\varphi^*(x_0, x'_n) = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(\xi_1^{(0)}, \dots, \xi_n^{(0)}, \tau \cdot \xi'_2{}^{(0)}, \dots, \tau \cdot \xi'_n{}^{(0)})}{\tau};$$

2) $\varphi^*(x, x')$ est convexe en x' en ce sens qu'en tout point x_0 de H , quels que soient les vecteurs x'_1 et x'_2 de E_n

$$\varphi^*(x_0, x'_1 + x'_2) \leq \varphi^*(x_0, x'_1) + \varphi^*(x_0, x'_2);$$

3) si nous introduisons pour $m = 1, 2, \dots$ l'intégrant

$$\varphi_m^*(x, x') = \text{borne inférieure}_{\rho \geq 0} (\rho \cdot |\varphi^*(x, u_0)| + m) + \varphi^*(x, x' + \rho u_0)$$

où $u_0 =$ vecteur unitaire de l'axe des ξ_1 , son cône positif d'éta-

l'ouillage $C_{\varphi_m^*x}$ est le plus petit cône fermé convexe incluant C_{φ^*x} et le rayon $R(x)$

$$\xi_1 \leq 0, \xi_2 = 0, \dots, \xi_n = 0, \xi_{n+1} = \frac{-\xi_1}{|\varphi^*(x, u_0)| + m}$$

qui est extérieur à C_{φ^*x} , sa figurative $S_{\varphi_m^*x}$ en est la frontière ; le rayon $\xi_1 = 0$; ..., $\xi_n = 0$, $\xi_{n+1} \geq 0$ lui étant intérieur, φ_m^* est quasi-régulier ; ses directions de linéarité sont celles de φ^* ⁽⁴⁵⁾ donc nécessairement des directions du plan de $\mathcal{E}_{n+1}$, $\xi_1 = 0$. Nous avons

$$\lim \varphi_m^* = \varphi^* ;$$

en outre quel que soit x de H et le vecteur x' de première composante > 0 , il existe un entier m_0 tel que

$$\text{pour } m \geq m_0 \quad \varphi_m^*(x, x') = \varphi^*(x, x').$$

Le rayon $R(x)$ dépendant continuellement de x , la représentation géométrique met en évidence la continuité des intégrants φ_m^* . La suite $\varphi_1^*, \dots, \varphi_m^*$ est une suite d'intégrants paramétriques finis, continus et quasi-réguliers convergeant vers φ^* ; nous avons donc le moyen de déduire aussitôt des propositions de semi-continuité inférieure des fonctionnelles $\lambda_{\varphi_m^*}$ qui résultent des théorèmes du § 2, des propositions relatives à la semi-continuité de $\mu_{\varphi^*} = \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_{\varphi_m^*}$. Remarquons à ce propos qu'il y a là une méthode générale applicable à tout intégrant paramétrique fini ou non qui peut être considéré comme limite d'une suite d'intégrants finis, continus et quasi-réguliers, par exemple à un intégrant $\varphi^*(x; \varpi)$ borné, semi-continu inférieurement en x uniformément vis-à-vis de ϖ (Cf. § 2, 2.4) et quasi-régulier, cas où sur les courbes rectifiables $\mu_{\varphi^*} = \lambda_{\varphi^*}$. Signalons en outre la grande simplicité de définition des intégrants φ_m^* qui tient au fait que nous leur demandons la continuité et la quasi-régularité sans exiger aucune propriété de dérivabilité.

3.1. Théorèmes sur la semi-continuité de la fonctionnelle μ_{φ^*} . — L'intégrant ordinaire $\varphi(\xi_1, \dots, \xi_n, \xi'_2, \dots, \xi'_n)$ de champ $H \subseteq \mathcal{E}_n$ étant supposé continu et quasi-régulier :

⁽⁴⁵⁾ Les définitions de la fonction χ , des directions de linéarité, des points exceptionnels donnés pour un intégrant fini s'appliquent encore ici grâce à $\varphi^* > -\infty$.

XLIII. — La fonctionnelle μ_{φ^*} est semi-continue inférieurement sur toute famille de courbes situées dans H de longueurs uniformément bornées (Conséquence du théorème XVII).

XLIV. — Si μ^* ne présente pas de points exceptionnels, en posant pour C non rectifiable $\mu_{\varphi^*}(C) = +\infty$ ⁽⁴⁶⁾, la fonctionnelle μ_{φ^*} est semi-continue inférieurement sur la famille de toutes les courbes situées sur H (Conséquence du théorème XVIII).

XLV. — Si l'ensemble des points exceptionnels de φ^* est de mesure linéaire nulle et si dans un voisinage de tout point exceptionnel, φ^* (ou φ) est non négatif, la fonctionnelle μ_{φ^*} est semi-continue inférieurement sur la famille de toutes les courbes rectifiables situées sur H (Conséquence du théorème XX).

3.2. Conditions sous lesquelles la fonctionnelle μ_{φ^*} n'est finie que sur une famille de courbes ordinaires. — Introduisons pour tout point $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ de H la condition

$$\mathcal{C}^*) \varphi^*(\xi_1, \dots, \xi_n, 0, \xi'_2, \dots, \xi'_n) = +\infty \text{ quels que soient } \xi'_2, \dots, \xi'_n \text{ finis}$$

qui se traduit sur l'intégrant ordinaire φ par

$$\left\{ \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(\xi_1, \dots, \xi_n, \tau \cdot \xi'_2, \dots, \tau \cdot \xi'_n)}{\tau} = +\infty \right. \\ \left. \text{quels que soient } \xi'_2, \dots, \xi'_n \text{ finis.} \right.$$

THÉORÈMES. — L'intégrant ordinaire φ de champ H étant supposé continu et quasi-régulier :

XLVI. — Si la condition $\mathcal{C}^*$ est vérifiée en tous les points x de H sauf, éventuellement, sur un ensemble dont l'intersection avec chaque plan $\xi_1 = \text{cte}$ est de mesure linéaire nulle, μ_{φ^*} n'est finie que pour des courbes ordinaires.

XLVII. — Si $\mathcal{C}^*$ est vérifiée en tous les points x de H sauf, éventuellement sur un ensemble de mesure linéaire nulle, μ_{φ^*} n'est finie que pour des courbes ordinaires absolument continues.

Rappelons que, d'après le théorème XLII, sa valeur est alors celle de l'intégrale ordinaire au sens de Lebesgue.

⁽⁴⁶⁾ $= \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_{\varphi_m^*}(C)$, les φ_m^* étant ceux que nous avons définis plus haut.

XLVIII. — (Conditions de Mac Shane combinées avec celles de XLVII). *Les conclusions de XLVII restent valables si l'ensemble des points x de H pour lesquels $\mathcal{C}^*$ n'est pas vérifiée se compose d'un ensemble de mesure linéaire nulle et de la somme d'une suite dénombrable d'ensembles situés chacun sur une courbe ordinaire absolument continue.*

L'intérêt des théorèmes XLVI, XLVII et XLVIII réside surtout dans le fait que lorsqu'ils sont applicables la recherche d'une minimante de μ_{φ^*} relativement à une famille de courbes rectifiables situées sur H se limite au cadre des courbes ordinaires et plus particulièrement au cadre des courbes ordinaires absolument continues.

3.3. *Existence locale de minimantes.* — Indiquons un théorème qui se déduit immédiatement de son analogue dans le cas paramétrique.

THÉORÈME XLIX. — *L'intégrant ordinaire φ de champ H étant supposé continu et quasi-régulier, autour de tout point non exceptionnel il existe un voisinage fermé W et deux nombres α et β tels que pour toute courbe rectifiable $\mathcal{C}$ située sur W et H nous ayons*

$$\lambda(\mathcal{C}) \leq \alpha \cdot \mu_{\varphi^*}(\mathcal{C}) + \beta.$$

Comme nous savons, ce théorème joint au théorème sur la semi-continuité inférieure de μ_{φ^*} assure l'existence locale d'une minimante.

3.4. *Cas du plan.* — Dans le cas du plan, $n = 2$, certaines questions se simplifient, c'est ainsi que la présence de directions de linéarité pour φ^* au point $x_0 = (\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)})$ s'exprime par le fait que $\varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_2')$ a la forme $\alpha_1 \cdot \xi_2' + \beta_1$ en ce point x_0 .

Voici un théorème constituant une extension globale du théorème précédent.

THÉORÈME L. — *φ étant un intégrant ordinaire du plan, de champ H , continu et quasi-régulier, K un ensemble fermé et borné $\subseteq H$, K_1 un sous-ensemble fermé de K ne contenant aucun point exceptionnel de φ , si nous supposons que dans un voisinage de tout point exceptionnel φ est non négatif alors :*

il existe deux nombres positifs α et β tels que pour toute courbe rectifiable C située sur K , la partie de C située sur K_1 ait une longueur $\leq \alpha \cdot \mu_{\varphi^}(C) + \beta$.*

Un exemple dû à Hahn (28, 446) montre que ce théorème (plus exactement sa traduction) dans le cas paramétrique n'est pas valable ; il en est de même dans le cas ordinaire avec $n > 2$.

CONCLUSION

Nous venons d'exposer les parties essentielles de la théorie métrique du Calcul des Variations telle qu'elle se présente actuellement. Nous nous contentons de signaler :

a) les généralisations dues à M. Menger (50, 6, 14, 21 ; cf. aussi 58"), portant : 1° sur la nature de la métrique primaire : substitution à un espace distancié d'un espace à métrique positive uniformément continue ; 2° sur les hypothèses de continuité et de quasi-régularité faites sur l'intégrant φ : admission d'un ensemble de points de discontinuité et de non quasi-régularité de φ de mesure linéaire nulle ;

b) l'interprétation donnée par M. Menger (50, 30) de courbes non rectifiables comme minimantes, laquelle s'applique en particulier aux exemples de Hahn (28, 446) et de Caratheodory (15, 310) ;

c) l'étude différentielle des minimantes entre deux points relatives à un intégrant du plan > 0 , continu et régulier, commencée par M. Bouligand (10, 46) et reprise récemment indépendamment, par M. Busemann (13).

Très importante du point de vue des applications est la détermination effective dans un cas numérique des minimantes (ou maximantes) dès que leur existence a été établie. M. Menger a préconisé une méthode par approximations successives faisant intervenir une suite de polygones convergeant vers la courbe cherchée ; remarquons à ce propos que la définition même de la longueur généralisée nous indique le moyen de la calculer avec telle approximation désirée. La construction de la suite minimale (ou maximale) convergente de polygones n'a fait jusqu'à présent l'objet d'aucune publication.

BIBLIOGRAPHIE

1. ALT. *Die Dreiecksungleichung in den verallgemeinerten Minkowskischen Räumen*, Erg. eines math. Koll., Heft 8, 1935-36.
2. ALT. *Ein Streckenbild für welches λ_φ nicht existiert, obwohl φ beschränkt, stetig und quasi-regulär ist*, Erg. eines math. Koll., Heft 8, 1935-36.
3. ARONSZAJN. *Sur quelques problèmes concernant les espaces de Minkowski et les espaces vectoriels généraux*, Rend. della R. Acc. Naz. Linc., t. 26, 1937.
4. ARONSZAJN. *Quelques recherches sur l'intégrale de Weierstrass*, Revue Scientifique, n° 8, août 1939.
5. ARONSZAJN. *Les méthodes métriques générales et le cas ordinaire du Calcul des Variations*, 1939, non publié.
6. BLUMENTHAL (Leonard). *Distance geometries, a study of the development of abstract metrics*, vol. XIII de : The University of Missouri Studies, 1938.
7. BOLZA. *Vorlesungen über Variationsrechnung*, Teubner, Leipzig, 1933.
8. BONNESEN et FENCHEL. *Theorie der konvexen Körper*, Springer, Berlin, 1934.
9. BOULIGAND. *Introduction à la géométrie infinitésimale directe*, Vuibert, Paris, 1932.
10. BOULIGAND. *Essai sur l'unité des méthodes directes*. Hayez, Bruxelles, 1933 ; reprod. dans les Mém. de la Soc. Roy. des Sc. de Liège, 3^e série, t. 19, 1934.
11. BOULIGAND. *Sur la distance d'un point variable à un ensemble fixe*, C. R. Paris, t. 206, 1938.
12. BURKILL J. C. *The derivatives of functions of intervals*, Fund. Math., t. 5, 1924.
13. BUSEMANN. *Lokale Eigenschaften der zu Variationsproblemen gehörigen metrischen Räume*, Fund. Math., t. 32, 1939.
14. CARATHEODORY. *Ueber die diskontinuierlichen Lösungen in der Variationsrechnung*, Dissertation (Göttingen 1904) parue aux : Math. Ann., t. 62, 1906.
15. CARATHEODORY. *Vorlesungen über Variationsrechnung*, Teubner, Leipzig und Berlin, 1934.
- 15'. DENJOY. *Sur l'intégration des différentielles totales*, Bull. Soc. Sc. Cluj, t. 7, 1934.
16. FINSLER. *Thèse* 1918, Göttingen.
17. FRÉCHET. *Sur quelques points du Calcul fonctionnel*, Thèse, Paris, 1906, parue aux : Rend. Circ. Mat. Palermo, t. 22, 1906.
18. FRÉCHET. *Distance de deux surfaces*, Ann. Soc. Pol. Math., t. 2, 1924.
19. FRÉCHET. *Sur une représentation paramétrique intrinsèque de la courbe continue la plus générale*, Journal. Math. p. et app., t. 4, 1925.
20. FRÉCHET. *Sur le prolongement des fonctionnelles semi-continues et sur l'aire des surfaces courbes*, Fund. Math., t. 7, 1925.

21. FRÉCHET. *Espaces abstraits*, Gauthier-Villars, Paris, 1928.
22. GOŁĄB et HÄRLEN. *Minkowskische Geometrie*, Monatshefte für Math. und Ph., t. 38, 1931.
23. GOŁĄB. *Quelques problèmes métriques de la géométrie de Minkowski* (en polonais), Trav. Acad. Mines Cracovie, Fasc. 6, 1932.
24. GOŁĄB. *Ein Beitrag zum Mengerschen Begriff des fastmetrischen Raumes*, Fund. Math., t. 32, 1939.
25. GOŁĄB. *Sur la fonction représentant la distance d'un point variable à un ensemble fixe*, C. R. Paris, t. 206, 1938.
26. HADAMARD. *Leçons sur le Calcul des Variations*, t. 1, Hermann, Paris, 1910.
27. HAHN H. *Reelle Funktionen*, Ak. Verlagsges., Leipzig, 1932.
28. HAHN H. *Ueber ein Existenztheorem der Variationsrechnung*, Sitzungsberichte Wien, t. 134, 1925.
29. HAMEL G. *Ueber die Geometrien, in denen die Geraden die Kürzesten sind*, Thèse 1901, Göttingen.
30. HAUSDORFF. *Mengenlehre*, Walter de Gruyter, Berlin und Leipzig, 1927.
31. HELLINGER. *Neue Begründung der Theorie quadratischer Formen von unendlichen Veränderlichen*, Journal für r. und. ang. Math., t. 136, 1909.
32. KEMPISTY. *Intégrale Denjoy-Stieltjes d'une fonction de deux variables*, C. R. Paris, t. 202, 1936.
33. VON KEREKJARTO. *Vorlesungen über Topologie*, Springer, Berlin, 1923.
34. KOLMOGOROFF. *Untersuchungen über den Integralbegriff*, Math. Ann., t. 103, 1930.
35. LAVRENTIEFF. *Sur quelques problèmes du Calcul des Variations*, Ann. di Mat., t. 4, 1926.
36. LEBESGUE. *Leçons sur l'Intégration*, Gauthier-Villars, Paris, 1928.
37. MAC SHANE. *Existence theorems for Ordinary Problems of the Calculus of Variations*, Annali della R. Sc. Norm. Sup. Pisa, t. 3, 1934, p. 183-211.
38. MAC SHANE. *Référence précédente*, p. 239-242.
39. MAC SHANE. *Duke Journal*, t. 2, 1936.
40. MANIA. *Sopra un esempio di Lavrentieff*, Bol. dell'Un. Mat. It., juin 1934.
41. MAYER (Anton E.). *Grösste Polygone mit gegebenen Seitenvektoren*, Commentarii Math. Helv., t. 10, 1937-38.
42. MENER. *Untersuchungen über allgemeine Metrik*, Math. Ann., t. 100, 1928.
43. MENER. *Untersuchungen über allgemeine Metrik*, Math. Ann., t. 103, 1930.
44. MENER. *Kurventheorie*, Teubner, Leipzig und Berlin, 1932.
45. MENER. *Metrische Geometrie und Variationsrechnung*, Fund. Math., t. 25, 1935.
46. MENER. *Sur un théorème général du Calcul des Variations*, C. R. Paris, t. 201, 1935.
47. MENER. *Calcul des Variations dans les espaces distanciés généraux*, C. R. Paris, t. 202, 1936.
48. MENER. *Courbes minimisantes non rectifiables et champs généraux de courbes admissibles dans le Calcul des Variations*, C. R. Paris, t. 202, 1936.
49. MENER. *La Géométrie des distances et ses relations avec les autres branches des mathématiques*, Ens. Math., déc. 1936.

50. Menger. *Die metrische Methode in der Variationsrechnung*, Erg. eines math. Koll., Heft 8, 1935-36.
 51. Menger. *Metric methods in Calculus of Variations*, Proc. Nat. Ac., t. 23, 1937.
 52. Menger. *Nouvelle démonstration de l'équation d'Euler-Lagrange*, C. R. Paris, t. 204, 1937.
 53. DE MISÈS. *La base géométrique du théorème de M. Mandelbrojt sur les points singuliers d'une fonction analytique*, C. R. Paris, t. 205, 1937.
 54. MORSE. *A special parametrization of curves*, Bull. of the Am. Math. Soc., t. 42, 1936.
 55. OSGOOD. *On a fundamental property of a minimum in the Calculus of Variations*, Trans. of the Ann. Math. Soc., t. 2, 1901.
 56. PAUC. *Sur les semi-continuités d'inclusion dans les espaces généraux de M. Fréchet*, C. R., Paris, t. 206, 1938.
 57. PAUC. *Images d'ensembles ordonnés. Polygones. Courbes*, Rend. della R. Acc. Naz. Linc., t. 27, 1938.
 58. PAUC. *L'inégalité triangulaire dans les espaces de Minkowski généralisés*, Rend. della R. Acc. Naz. Linc., t. 26, 1937.
 - 58'. PAUC. *Considérations sur la surface représentative de la distance d'un point à un ensemble ponctuel plan*, Revue Scientifique, n° 8, août 1939.
 - 58''. PAUC. *Etude d'une fonctionnelle généralisant la longueur d'une courbe dans les espaces à écart positif uniformément continu*, Revue Scientifique, novembre-décembre 1939.
 59. PAUC. *L'intégrale de Weierstrass-Bouligand-Menger. Ses applications au Calcul des Variations*, Ann. della. R. Sc. Norm. Sup. Pisa, t. 8, 1939.
 - 59'. RIESZ FR. *Comptes rendus du Congrès de Zurich*, t. 1, 1932.
 60. VON SCHWARZ J. *Ueber Kurvenpunkträume und ihre Anwendung auf Variationsprobleme mit höheren Ableitungen*, Math. Ann., t. 115, 1938.
 61. TONELLI. *Sui massimi et minimi assoluti del Calcolo delle Variazioni*, Rend. Circ. Mat. Palermo, t. 32, 1911.
 62. TONELLI. *Sugli integrali curvilinei*, Rend. della R. Acc. Naz. Linc., t. 20, 1911.
 63. 64. 65. TONELLI. *Sugli integrali curvilinei del Calcolo delle Variazioni*, Rend. della R. Acc. Naz. Linc., t. 21, 1912 (3 notes).
 66. 67. TONELLI. *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, Zanichelli, Bologna, vol. I, 1921, vol. II, 1923.
 68. TONELLI. *Sulle proprietà delle estremanti*, Ann. della R. Soc. Norm. Sup. Pisa, t. 3, 1934.
 69. TONELLI. *Su gli integrali del Calcolo delle Variazioni in forma ordinaria*, Ann. della R. Sc. Norm. Sup. Pisa, t. 3, 1934.
 70. WALD. *Ein Streckenbild für welches λ_{φ} nicht existiert, obwohl λ_{φ} für jeden Anfangsabschnitt existiert*, Erg. eines math. Koll., Heft 8, 1935-36.
 71. WALD. *Die φ -Länge im Hilbertschen Raum*, Erg. eines math. Koll., Heft 8, 1935-36.
-

DEUXIÈME PARTIE

LES MÉTHODES DIRECTES
EN GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE



INTRODUCTION

La géométrie infinitésimale directe de M. Bouligand et la géométrie de M. Menger constituent des applications des idées de Cantor dans le domaine de la géométrie différentielle ; comme la géométrie théorique des ensembles (mengentheoretische Geometrie), elles s'intéressent à des ensembles de nature très générale, en particulier à des continus quelconques, mais alors que celle-ci jusqu'à présent ne s'occupait que de propriétés topologiques, elles s'inspirent de la géométrie classique pour définir des notions de caractère plus spécialement euclidien ou métrique. C'est ainsi que, généralisant la définition de la tangente à une courbe en un point, M. Bouligand (6, 66) ⁽¹⁾ définit pour un ensemble E d'un espace euclidien $\mathcal{E}_n$ en un point d'accumulation e_0 de E le contingent (ordinaire) $\mathcal{C}_{e_0}(E)$ comme l'ensemble des rayons R pour lesquels il existe une suite $e_1, \dots, e_m, \dots$ de points de E distincts de e_0 et convergeant vers e_0 avec $\lim R(e_0, e_m) = R$ (si $a \neq b$, $R(a, b)$ désigne le rayon d'origine a supportant b) ^(1').

Un aspect de ces géométries modernes mis particulièrement en relief par M. Bouligand consiste en une nouvelle sélection d'ensembles ; mentionnons les continus de $\mathcal{E}_2$ dont le contingent en chaque point est incomplet (6, 112) ou bien non-connexe, ou bien totalement discontinu (6, 165). Par là, elles prolongent la topolo-

⁽¹⁾ 6 renvoie à la Bibliographie placée à la fin, 66 indique la page.

^(1') $\mathcal{C}_{e_0}(E)$ est appelé par MM. Denjoy, Marchaud, Roger, ... *faisceau dérivé de l'ensemble E en e_0* , dénomination qui tire son origine de la signification analytique de $\mathcal{C}_{e_0}(E)$ lorsque E est dans le plan, la courbe représentative d'une fonction. Nous distinguons entre

- 1) le contingent $\mathcal{C}_{e_0}(E)$ qui est un ensemble de rayons,
- 2) le cône du contingent qui est l'ensemble des points appartenant à ces rayons,
- 3) l'ensemble des directions des rayons du contingent.

gie pure et font appel à des procédés de recherche analogues. M. Bouligand a même introduit l'expression de « topologie restreinte » pour désigner l'étude des propriétés des ensembles de $\mathcal{E}_n$ invariantes par certains sous-groupes du groupe des homéomorphismes de $\mathcal{E}_n$ en lui-même, ainsi la topologie restreinte du premier ordre de $\mathcal{E}_n$ correspond au groupe des transformations biunivoques de $\mathcal{E}_n$ en lui-même définies par $\eta_i = \varphi_i(\xi_1, \dots, \xi_n)$ $i = 1, \dots, n$, lorsque les fonctions φ_i admettent des dérivées finies et continues en $\xi_1 \dots \xi_n$ à déterminant (jacobien) > 0 ; la propriété pour un ensemble de $\mathcal{E}_n$ d'avoir en chaque point d'accumulation un contingent incomplet relève de la topologie restreinte du premier ordre.

Un second aspect des géométries de MM. Bouligand et Menger et peut-être le plus connu réside en ce qu'elles cherchent à étudier les propriétés différentielles des courbes et des surfaces directement, c'est-à-dire en substituant au raisonnement analytique classique un raisonnement de nature géométrique. Une telle recherche nécessite la création d'une technique nouvelle ; un bel exemple en est fourni par la théorie de la courbure des surfaces en géométrie des distances due à M. Wald (48) :

M. Wald introduit une courbure de surface pour un espace distancié $\mathcal{O}$ en un point d'accumulation laquelle, lorsque $\mathcal{O}$ est une surface de Gauss classique métrisée au moyen de la distance géodésique (métrique interne), n'est autre que la courbure totale ; il entend alors par surface de Gauss un espace distancié compact convexe (2) admettant en chaque point une courbure de surface finie, et retrouve pour elles les propositions de la « théorie interne des surfaces » (3).

Les méthodes directes de MM. Bouligand et Menger présentent l'intérêt de ne pas soumettre à des hypothèses *a priori* les variétés géométriques que l'on étudie comme c'est le cas avec les méthodes analytiques qui pour entrer en jeu doivent supposer vérifiées des « hypothèses de différentiabilité » (4) ; en outre, elles gardent le contact étroit avec la réalité géométrique.

(2) au sens de M. Menger (29, 82).

(3) Étude des propriétés des surfaces invariantes par application conservant le ds^2 .

(4) Cf. par exemple la définition de la surface de Gauss dans les traités classiques et chez Wald (48, 33).

La différence principale entre la géométrie infinitésimale directe de M. Bouligand et la géométrie des distances de M. Menger est que celle-ci étudie des espaces distanciés généraux et celle-là des ensembles euclidiens ; la première suit parfois d'assez près la géométrie infinitésimale classique ⁽⁵⁾ alors que la seconde s'en écarte fréquemment, non seulement par les raisonnements mais aussi par les résultats ⁽⁶⁾, divergences qui mettent en évidence des propriétés des espaces euclidiens intéressantes du point de vue de leur axiomatique.

Nous développons ici les chapitres de la géométrie infinitésimale directe et de la géométrie des distances correspondant à la théorie de la tangente et de la courbure des courbes en géométrie différentielle classique ; il s'agit de questions élémentaires mais envisagées sous un angle nouveau ; c'est ainsi que nous résolvons le problème suivant posé par M. Fréchet (20, 153) :

Une courbe C de $\mathcal{E}_n$ admettant en un point p sur elle une tangente, sous quelles conditions existe-t-il une représentation paramétrique propre p de C telle que pour la valeur τ correspondant à p , la fonction $p(\tau)$ admette une dérivée $p'(\tau) \neq$ vecteur nul ?

La comparaison des diverses courbures, bien qu'elle apporte peu de résultats originaux, a été examinée très soigneusement ; elle fournit en effet un exemple particulièrement simple des divergences entre les définitions classiques et les définitions directes.

Terminons en signalant l'ouvrage de M. L. Blumenthal, « Distance Geometries. A Study of the development of abstract metrics » (The University of Missouri Studies, vol. XIII, 1938) qui offre un tableau complet de la géométrie des distances en 1938 ; comme publication s'y rapportant parue depuis cette date, nous mentionnons l'article de M. Alexits sur la torsion des espaces distanciés (1) : enfin nous ne pouvons manquer de citer les belles recherches de MM. Busemann et Feller sur la courbure des surfaces convexes (12, 13) qui constituent un chapitre important de la géométrie infinitésimale directe.

(5) Cf. la manière dont M. Bouligand étudie une surface au voisinage d'un point (6, 173).

(6) Cf. les propriétés de la « relation entre » (Zwischenrelation) dans les espaces euclidiens et dans les espaces distanciés et leurs conséquences pour la théorie de la convexité (29, 78-81, 106-113).

PRÉLIMINAIRES

Nous allons nous servir dans cet Exposé de notions empruntées à la théorie des ensembles, particulièrement à la théorie des continus ; pour la plupart des définitions nous renvoyons à la « Kurventheorie » de M. Menger (Springer, 1932). Nous donnons cependant ici quelques indications sur les deux notions bien distinctes de courbe qui reviendront fréquemment par la suite.

1. En Topologie, une courbe est un continu au sens de Menger (espace distanciabile compact, connexe, contenant plus d'un point) de dimension un (31, 80) ; les propriétés de ces courbes sont étudiées dans l'ouvrage de M. Menger qui vient d'être mentionné.

2. Au sens plus ancien du mot, une courbe est ce que décrit un point qui se déplace continuellement dans un espace durant un intervalle fermé de temps ; les conventions dont nous ferons usage assurant le maniement de cette notion sont les suivantes (35) : un application continue $\mathbf{p}$ d'un intervalle fermé de nombres $[\alpha\beta]$ avec $\alpha \leq \beta$ dans un espace (topologique) $\mathcal{H}$ définit une courbe $\mathcal{C}$; nous indiquons la dépendance entre $\mathbf{p}$, $[\alpha\beta]$ et $\mathcal{C}$ par la notation

$$\mathcal{C} : \mathbf{p}[\alpha\beta]$$

et nous nommons $\mathbf{p}$ une représentation paramétrique de $\mathcal{C}$; la valeur τ parcourant $[\alpha\beta]$ est le paramètre. La *représentation* $\mathbf{p}$ est dite *propre* si le point $\mathbf{p}(\tau)$ n'est immobile sur aucun vrai sous-intervalle de $[\alpha\beta]$. Deux courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}^*$ définies par des représentations propres $\mathbf{p}$ et $\mathbf{p}^*$ respectivement sont à considérer comme égales lorsqu'il existe une correspondance biunivoque appliquant l'intervalle $[\alpha\beta]$ de définition de $\mathbf{p}$ sur l'intervalle $[\alpha^*\beta^*]$ de définition de $\mathbf{p}^*$ en respectant l'ordre des valeurs et telle que pour tout couple (τ, τ^*) de valeurs homologues nous ayons

$$\mathbf{p}(\tau) = \mathbf{p}^*(\tau^*) ;$$

si elle existe une telle correspondance est unique ; elle est de la forme $\tau^* = \varphi(\tau)$, φ fonction croissante de τ vérifiant $\alpha^* = \varphi(\alpha)$, $\beta^* = \varphi(\beta)$; $\mathbf{p}$ et $\mathbf{p}^*$ sont dites « *représentations paramétriques équivalentes* » ; elles représentent la même courbe.

$\mathbf{p}$ désignant une représentation paramétrique propre d'une courbe $\mathcal{C}$ définie sur l'intervalle $[\alpha\beta]$, nous faisons correspondre à une valeur τ de $[\alpha\beta]$ outre le point $p = \mathbf{p}(\tau)$ de l'espace $\mathcal{H}$ un nouveau point $\mathfrak{p}$ dit « *point sur $\mathcal{C}$* » dont nous notons la dépendance avec $\mathbf{p}$ et τ par

$$\mathfrak{p} : \mathbf{p}(\tau)$$

et nous nommons p « *support de $\mathfrak{p}$* ». Nous considérons comme distincts deux points sur $\mathcal{C}$ correspondant à des valeurs distinctes du paramètre ; l'ensemble des points sur $\mathcal{C}$ est naturellement ordonné comme celui des valeurs τ , il est ainsi semblable à l'intervalle $[\alpha\beta]$. Nous nommons $\mathfrak{p} : \mathbf{p}(\tau)$, initial, intérieur ou final suivant que $\tau = \alpha$, $\alpha < \tau < \beta$, $\tau = \beta$.

Si $\mathbf{p}^*$ est une autre représentation paramétrique de $\mathcal{C}$, $\tau^* = \varphi(\tau)$ la correspondance qui fait passer de $\mathbf{p}^*$ à $\mathbf{p}$, $\mathbf{p}_0$ un point sur $\mathcal{C}$ de paramètre τ_0 dans la représentation $\mathbf{p}$, la valeur τ_0^* telle que $\mathbf{p}_0 : \mathbf{p}^*(\tau_0^*)$ est $= \varphi(\tau_0)$.

ÉTUDE DIRECTE DES PROPRIÉTÉS DIFFÉRENTIELLES DES CONTINUS ET DES COURBES DANS LES ESPACES EUCLIDIENS ET DANS LES ESPACES DISTANCIÉS

1. — CAS DES ESPACES EUCLIDIENS

Nous allons introduire pour les ensembles et les courbes d'un espace euclidien une échelle de propriétés locales analogues à celles que constituent pour les fonctions d'une variable réelle l'existence et la continuité des dérivées successives en un point et satisfaisant aux conditions suivantes :

Chacune de ces propriétés :

1) *ne nécessite pour s'exprimer aucune hypothèse spéciale sur l'ensemble ou sur la courbe (Principe fondamental des géométries de Bouligand et Menger) ⁽⁷⁾;*

2) *entraîne toutes celles d'ordre inférieur (d'où l'appellation de : échelle) ;*

3) *est susceptible d'une interprétation simple dans les espaces distanciés (d'où parallélisme entre les géométries de Bouligand et Menger).*

1. Tangentes à un ensemble et à une courbe. Propriétés I et II.

1.1. *Tangente à un ensemble.* — Nous appelons *tangente à un ensemble* E de l'espace euclidien $\mathcal{E}_n$ en un de ses points d'accumulation e_0 une droite D telle que quelle que soit la suite $e_1, \dots, e_m, \dots$ de points de E distincts de e_0 convergeant vers e_0 , nous ayons

$$\lim D(e_0, e_m) = D,$$

p et q étant deux points distincts de $\mathcal{E}_n$, nous représentons par $D(p, q)$ la droite les joignant; une telle droite D si elle existe est nécessairement unique; nous disons que E jouit en e_0 de la pro-

⁽⁷⁾ Ce principe est aussi à la base de la théorie de la convexité (5) et de la géométrie finie (28, 23).

priété I lorsqu'il y admet une tangente D_0 ; ceci revient à dire que le contingent $c_{e_0}(E)$ de E en e_0 se réduit

soit à deux rayons opposés qui sont portés par D_0 et issus de e_0 , D_0 est appelée dans ce cas une *tangente ordinaire*,

soit à un seul rayon, D_0 est alors appelée une *tangente de rebroussement*.

De la proposition de M. Denjoy ⁽⁸⁾ sur la dénombrabilité des sommets d'un ensemble (6, 110) découle le

THÉORÈME I. — *Les points où un ensemble euclidien E admet une tangente de rebroussement constituent un ensemble dénombrable.*

Disons que l'ensemble E de $\mathcal{E}_n$ a partout une tangente lorsqu'il admet une tangente en chacun de ses points d'accumulation ; d'après le théorème précédent si E a partout une tangente, sauf au plus pour les points d'un ensemble dénombrable cette tangente est ordinaire donc le contingent est non-connexe. Nous avons démontré ⁽⁹⁾ que si E est un continu au sens habituel (ensemble fermé, connexe, non réduit à un point) borné, un point de E où le contingent est non-connexe est un point de morcellement local ; nous déduisons d'une proposition de Whyburn (31, 164) et d'une proposition de M. Harrold (critère (4), 22, 111) que :

« un continu euclidien borné dont le contingent en chacun des points à l'exception au plus de ceux d'un ensemble dénombrable est non-connexe, est une somme d'arcs héréditaire au sens de M. Harrold ⁽¹⁰⁾. »

C'est donc une courbe régulière ⁽¹¹⁾ d'une espèce très particulière ; ajoutons que l'ensemble des points de ramification ⁽¹¹⁾ d'un tel continu est dénombrable.

⁽⁸⁾ Proposition donnée par M. Denjoy pour un ensemble parfait discontinu (15, 139) et étendue par M. Durand à un ensemble quelconque en utilisant le procédé de raisonnement de M. Denjoy (17, 365). Voir aussi (38, 657).

⁽⁹⁾ Dans 37. Le théorème est énoncé dans (36, 1244).

⁽¹⁰⁾ Nous entendons par *somme d'arcs* un continu au sens de Menger qui est la réunion d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'arcs (arc = image d'un segment fermé par homéomorphie) ; nous avons démontré qu'on obtenait la même notion en imposant à ces arcs d'avoir deux à deux en commun au plus un nombre fini de points ou au plus des extrémités. Une *somme d'arcs* est appelée par M. Harrold (22) *héréditaire* lorsque 1) elle est localement connexe 2) tous ses sous-continus sont eux-mêmes sommes d'arcs.

⁽¹¹⁾ Définitions dans (31, 96-100).

THÉOREME II. — *Un continu euclidien borné admettant partout une tangente est une somme d'arcs héréditaire au sens de M. Harrold.*

1.11. — Une remarque importante pour l'interprétation métrique de la propriété I est la suivante :

un continu borné de $\mathcal{E}_n$ (donc *a fortiori* un ensemble quelconque), soit C , peut jouir en un de ses points c_0 de la propriété suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{quel que soit } \varepsilon > 0, \text{ il existe un } \rho > 0 \text{ tel que } c_1, c_2, c_3 \text{ dési-} \\ \text{gnant trois points distincts de } C \text{ distants de } c_0 \text{ de moins de } \rho, \\ \text{un des angles du triangle } c_1, c_2, c_3 \text{ soit } < \varepsilon, \end{array} \right.$$

sans admettre de tangente en c_0 . Un premier exemple d'un continu présentant cette particularité nous a été fourni par M. A. Wald ; la spirale du plan définie en coordonnées polaires par $\rho'' = e^{-\omega^2}$, $\omega \geq 0$ complétée par le point origine o présente en ce point le même phénomène ⁽¹²⁾.

1.2. *Tangente à une courbe.* — C étant une courbe de $\mathcal{E}_n$ non réduite à un point, p_0 un point sur elle de support p_0 , nous disons qu'elle jouit en p_0 de la propriété I si elle admet en p_0 une tangente c'est-à-dire s'il existe une droite D_0 telle que pour toute suite $p_1, \dots, p_m, \dots$ de points sur C de supports respectifs $p_1, \dots, p_m, \dots$ avec

$$p_m \neq p_0 \quad \text{pour } m = 1, 2, \dots \quad \lim_{m \rightarrow \infty} p_m = p_0,$$

nous ayons

$$\lim_{m \rightarrow \infty} D(p'_m, p'_m) = D_0.$$

Appelons avec M. Bouligand contingent (antérieur, postérieur) de C en p_0 l'ensemble des rayons R pour lesquels il existe une suite $p_1, \dots, p_m, \dots$ de points sur C (précédant p_0 , suivant p_0) convergeant vers p_0 , de supports respectifs $p_1, \dots, p_m, \dots$ distincts de p_0 avec

$$\lim R(p_0, p_m) = R ;$$

le contingent de C en p_0 est la réunion du contingent antérieur et du contingent postérieur de C en p_0 ; le contingent antérieur (pos-

⁽¹²⁾ Cette spirale possède encore la propriété qu'en o la longueur d'arc est un infiniment petit équivalent à la corde (9, 47).

térieur) n'est vide que dans le cas où $\mathfrak{p}_0$ est initial (final). La propriété I pour $\mathcal{C}$ en $\mathfrak{p}_0$ équivaut à la suivante : le contingent de $\mathcal{C}$ en $\mathfrak{p}_0$ se réduit soit à deux rayons opposés soit à un rayon ; si $\mathfrak{p}_0$ est intérieur, dans le premier cas la *tangente* D_0 est dite *ordinaire*, dans le second cas elle est dite de *rebroussement* ; si $\mathfrak{p}_0$ est initial ou final, la tangente est toujours considérée comme ordinaire.

Remarquons qu'une condition nécessaire et suffisante pour que la courbe $\mathcal{C}$ ait en $\mathfrak{p}_0$ (intérieur, initial ou final) une tangente ordinaire D_0 est que

quelles que soient les deux suites $\mathfrak{p}'_1, \dots, \mathfrak{p}'_m, \dots, \mathfrak{p}''_1, \dots, \mathfrak{p}''_m, \dots$ de points sur $\mathcal{C}$, de supports respectifs $p'_1, \dots, p'_m, \dots, p''_1, \dots, p''_m, \dots$ avec $p'_m \neq p''_m$ pour $m = 1, 2, \dots$, convergeant vers $\mathfrak{p}_0$ en vérifiant $\mathfrak{p}'_m \leq \mathfrak{p}_0 \leq \mathfrak{p}''_m$, nous ayons

$$\lim D(p'_m, p''_m) = D_0.$$

Par *tangente orientée* à $\mathcal{C}$ en $\mathfrak{p}_0$, nous entendons une tangente ordinaire orientée dans la direction du rayon du contingent postérieur si $\mathfrak{p}_0$ n'est pas final, dans la direction opposée à celle du rayon du contingent antérieur si $\mathfrak{p}_0$ est final.

1.21. Interprétation analytique. — Soit $\mathbf{p}$ une représentation paramétrique propre de $\mathcal{C}$, τ_0 la valeur du paramètre correspondant au point $\mathfrak{p}_0$, τ une autre valeur distincte, $p = \mathbf{p}(\tau)$; considérons le vecteur

$$\mathbf{v}(\tau_0, \tau) = \frac{\overrightarrow{p_0 p}}{\tau - \tau_0}.$$

S'il possède une limite ν_0 lorsque τ tend vers τ_0 de façon quelconque sur $[\alpha\beta]$

$$\lim_{\tau \rightarrow \tau_0} \mathbf{v}(\tau_0, \tau) = \nu_0,$$

cette limite est la dérivée première de $\mathbf{p}(\tau)$ en τ_0

$$\nu_0 = \mathbf{p}'(\tau_0);$$

si $\nu_0 \neq \mathbf{0}$ (vecteur nul), la courbe $\mathcal{C}$ possède en $\mathfrak{p}_0$ une tangente qui n'est autre que la droite supportant ν_0 ;

si $\nu_0 = \mathbf{0}$, il peut arriver que $\mathcal{C}$ ne présente au point $\mathfrak{p}_0$ aucune particularité géométrique, en effet :

THÉORÈME III. — $\mathcal{C}$ étant une courbe d'un espace euclidien et $\mathbf{p}_0$ un point sur elle, il existe toujours une représentation propre de $\mathcal{C}$ soit $\mathbf{p}$ telle que τ_0 désignant la valeur du paramètre correspondant à $\mathbf{p}$, la fonction $\mathbf{p}$ soit dérivable en τ_0 et $\mathbf{p}'(\tau_0) = \mathbf{0}$.

1.22. *Problème local de M. Fréchet* (20, 153). — Un problème qui se pose alors naturellement est le suivant :

une courbe $\mathcal{C}$ admettant au point $\mathbf{p}_0$ une tangente D_0 , existe-t-il toujours une représentation propre de $\mathcal{C}$, soit $\mathbf{p}$, telle que τ_0 désignant la valeur du paramètre correspondant à $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}$ soit dérivable en τ_0 et $\mathbf{p}'(\tau_0) \neq \mathbf{0}$?

Partons d'une représentation propre de $\mathcal{C}$, nommons-la $\mathbf{q}$, d'intervalle de définition $[01]$ et soit σ_0 le paramètre de $\mathbf{p}_0$, σ le paramètre courant ; $\mathcal{C}$ ayant en $\mathbf{p}_0$ une tangente, une condition nécessaire pour que la fonction $\mathbf{q}$ possède une dérivée $\neq \mathbf{0}$ en σ_0 est que la longueur du vecteur

$$\mathbf{v}(\sigma_0, \sigma_0 + \varepsilon) = \frac{\overrightarrow{\mathbf{q}(\tau_0)\mathbf{q}(\sigma_0 + \varepsilon)}}{\varepsilon}$$

c'est-à-dire

$$\mu(\varepsilon) = \frac{\delta(\mathbf{q}(\sigma_0)\mathbf{q}(\sigma_0 + \varepsilon))}{|\varepsilon|} \quad (\delta(ab) = \text{distance de } a \text{ à } b)$$

définie pour $\varepsilon \neq 0$ vérifiant $0 \leq \sigma_0 + \varepsilon \leq 1$ admette une limite non nulle pour $\varepsilon \rightarrow 0$; cette condition est aussi suffisante si $\mathbf{p}_0$ est initial ou final. Supposons que $\mathbf{p}_0$ soit point intérieur, donc que $0 < \sigma < 1$; si la condition précédente est remplie $\mathbf{v}(\sigma_0, \sigma_0 + \varepsilon)$ a une limite ν_g lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ par valeurs inférieures et une limite ν_d lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ par valeurs supérieures ; en outre ν_g et ν_d sont égaux si la tangente D_0 est ordinaire, opposés si la tangente D_0 est de rebroussement. Donc le problème de M. Fréchet se résout certainement négativement lorsque la tangente D_0 est de rebroussement ; plaçons-nous alors dans le cas où la tangente D_0 est ordinaire. La représentation paramétrique propre la plus générale de $\mathcal{C}$, soit $\mathbf{p}$, s'obtient en partant d'une fonction continue croissante φ définie sur $[01]$, par ailleurs arbitraire, et posant

$$\alpha = \varphi(0) \quad \beta = \varphi(1)$$

pour τ sur $[\alpha\beta]$ $\mathbf{p}(\tau) = \mathbf{q}(\varphi^{-1}(\tau))$ (φ^{-1} = fonction inverse de φ) ;

si $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu(\varepsilon)$ n'existe pas ou est nulle ou infinie, pour résoudre affirmativement le problème posé il nous faut trouver une φ telle que

$$\mu_{\varphi}(\varepsilon) = \frac{\delta(\mathbf{p}(\sigma_0)\mathbf{p}(\sigma_0 + \varepsilon))}{|\varphi(\sigma_0 + \varepsilon) - \varphi(\sigma_0)|}$$

définie dans les mêmes conditions que $\mu(\varepsilon)$, ait une limite finie non nulle pour $\varepsilon \rightarrow 0$.

Nous nous trouvons en face du problème d'analyse suivant : étant donnée une fonction continue $\delta(\varepsilon) \geq 0$ ⁽¹³⁾ définie sur un intervalle $[0 \ \varepsilon_0]$ avec $\varepsilon_0 > 0$, nulle pour $\varepsilon = 0$, existe-t-il une fonction continue croissante $\gamma(\varepsilon)$ définie sur le même intervalle telle que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\delta(\varepsilon)}{\gamma(\varepsilon)}$$

existe et ait une valeur finie non nulle ?

Une telle fonction γ ne peut exister si $\delta(\varepsilon)$ est identiquement nulle sur un intervalle $[0 \ \varepsilon'_0]$ avec $0 < \varepsilon'_0 < \varepsilon_0$; supposons qu'il n'en soit pas ainsi, alors quel que soit ε sur l'intervalle $[0 \ \varepsilon_0]$ la fonction

$\delta^*(\varepsilon)$ = borne supérieure de $\delta(\xi)$ pour ξ parcourant $[0 \ \varepsilon]$
est > 0 dès que ε est > 0 . Introduisons pour ε vérifiant $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ la fonction

$$\chi(\varepsilon) = \frac{\delta^*(\varepsilon)}{\delta(\varepsilon)} \quad \text{si } \delta(\varepsilon) \neq 0 \quad , = \infty \quad \text{si } \delta(\varepsilon) = 0 ;$$

notons que $\chi(\varepsilon) \geq 1$. Nous avons démontré que la condition nécessaire et suffisante pour que γ existe est que $\chi(\varepsilon)$ ait une limite égale à 1 lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Revenant à notre problème initial nous sommes conduits à introduire les définitions suivantes.

1.23. Fonctions χ_g et χ_d . — $\mathbf{p}_1$ et $\mathbf{p}_2$ étant deux points distincts sur une courbe $\mathcal{C}$ d'un espace euclidien, plus généralement distancié, de supports respectifs p_1 et p_2 , $\mathbf{p}$ un point mobile sur $\mathcal{C}$ de support p allant de l'un à l'autre, nous représentons par $\delta^*(\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2)$ la

⁽¹³⁾ L'hypothèse de la non-négativité de $\delta(\varepsilon)$ est accessoire ; si nous la laissons tomber nous constatons aussitôt que le problème ne se résout affirmativement que dans les cas où sur un intervalle $[0 \ \varepsilon_0^*]$ avec $0 < \varepsilon_0^* \leq \varepsilon_0$ la fonction est soit positive soit négative. Ce qui ramène au problème posé ; il suffit dans le second cas de substituer $-\delta(\varepsilon)$ à $\delta(\varepsilon)$.

borne supérieure des distances de p_1 à p laquelle est nécessairement $\geq \delta(p_1 p_2)$ et non nulle, et par $\chi(p_1 p_2)$ le rapport

$$\frac{\delta^*(p_1 p_2)}{\delta(p_1 p_2)}, \text{ le posant } = \infty \text{ si } p_1 = p_2.$$

p_0 désignant un point sur C fixé, nous posons alors :

si p_0 est non initial

$$\chi_g(p_0) = \limsup \chi(p_0 p) \text{ pour } p < p_0 \text{ et } p \rightarrow p_0,$$

si p_0 est non final

$$\chi_d(p_0) = \limsup \chi(p_0 p) \text{ pour } p > p_0 \text{ et } p \rightarrow p_0;$$

évidemment $\chi_g \geq 1$, $\chi_d \geq 1$.

A l'aide de ces fonctions, la réponse au problème de M. Fréchet s'exprime ainsi :

THÉORÈME IV. — *Si la courbe C admet en p_0 une tangente, une condition nécessaire est suffisante pour qu'il existe une représentation paramétrique propre de C , soit p , telle que τ_0 désignant la valeur du paramètre correspondant à p_0 , la fonction $p(\tau)$ possède en τ_0 une dérivée $\neq$ vecteur nul, est que*

la tangente soit ordinaire

χ_g et χ_d (ou seulement l'une des deux si p_0 est initial ou final) aient en p_0 la valeur 1.

Nous voyons donc que le problème local de M. Fréchet est résolu négativement dans les deux cas suivants :

1) la tangente D_0 est de rebroussement ;

2) p_0 est point d'accumulation de l'ensemble des points sur C ayant même support que lui ; dans ce cas en effet l'une au moins des fonctions χ_g , χ_d a en p_0 la valeur ∞ .

M. Valiron (47, 50-51) a le premier donné l'exemple d'un arc doué d'un sens de parcours ayant en un point une tangente ordinaire et tel que toute représentation paramétrique de cet arc, dérivable pour la valeur correspondante du paramètre y possède la dérivée nulle ; la courbe du plan définie en coordonnées polaires par

$$\begin{cases} \rho = \omega. \left(1 + \omega + \omega \sin \frac{1}{\omega} \right) & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq \omega < 0 \\ \rho = 0 & \text{si } \omega = 0 \end{cases}$$

présente pour la valeur 0 du paramètre ω , cette particularité ; en fait en ce point $\chi_a = \infty$.

M. Ward (49, 281-282) a construit une courbe offrant la même particularité en une infinité non dénombrable de points sur elle ; voici son procédé tel qu'il apparaît à notre analyse : fixons-nous dans un plan muni de deux axes de coordonnées rectangulaires ax_1, ax_2 un arc (doué d'un sens de parcours) $\mathfrak{A}$ commençant en $a = (0,0)$ et finissant en $b = (1,0)$ jouissant d'une tangente continue, la demi-tangente (rayon du contingent) en a ayant la direction de a vers b , la demi-tangente en b celle de b vers a et tel que la distance maximum d'un point de $\mathfrak{A}$ à a soit > 1 ; τ_1 et τ_2 étant deux nombres positifs quelconques avec $\tau_1 > \tau_2$, nous nommons $\mathfrak{A}_{\tau_1\tau_2}$ l'arc homothétique à $\mathfrak{A}$ commençant en $(\tau_1, 0)$ et finissant en $(\tau_2, 0)$ et nous en choisissons une représentation paramétrique ayant $[\tau_1\tau_2]$ comme intervalle de définition. Δ désignant le discontinu de Cantor relatif à l'intervalle $I = [01]$, nous définissons une courbe $c : q [01]$ ainsi si τ appartient à Δ

$$q(\tau) = (\tau, 0)$$

si τ appartient à $(I - \Delta)$, τ_1 et τ_2 représentent les extrémités du sous-intervalle de I contigu à Δ contenant τ

$$q(\tau) = \text{point de paramètre } \tau \text{ sur l'arc } \mathfrak{A}_{\tau_1\tau_2}.$$

Alors :

c est une courbe rectifiable douée partout d'une tangente et quel que soit τ dans Δ , χ_a a en $q : q(\tau)$ une valeur > 1 . Signalons que la tangente est continue aux points sur c correspondant aux τ de $(I - \Delta)$; elle présente une discontinuité pour ceux correspondant aux τ de Δ .

1.24. Equivalence infinitésimale de la longueur d'arc et de la corde pour une courbe en un point. — c étant une courbe rectifiable non réduite à un point dont la représentation au moyen de la longueur d'arc λ est s , nous disons qu'en p_0 correspondant à la valeur λ_0 de λ , la longueur d'arc est un infiniment petit équivalent à la corde lorsque λ' et λ'' désignant deux valeurs de λ avec $\lambda' < \lambda''$, le rapport

$$\frac{\delta(s(\lambda') s(\lambda''))}{\lambda'' - \lambda'}$$

tend vers 1 pour $\left. \begin{matrix} \lambda' \\ \lambda'' \end{matrix} \right\} \rightarrow \lambda_0$ avec $\lambda' \leq \lambda_0 \leq \lambda''$. Il est aisé de montrer qu'en un tel point p_0 :

- 1) la tangente si elle existe est ordinaire,
- 2) χ_s et χ_a (seulement l'un d'eux si p_0 est initial ou final) sont égaux à 1.

THÉORÈME V. — *Si c est une courbe rectifiable non réduite à un point dont la représentation au moyen de la longueur d'arc λ est s , pour presque toutes les valeurs de λ*

$$\chi_s(f) = \chi_a(f) = 1 \quad (f : s(\lambda)).$$

Ce théorème résulte encore, par application du théorème IV d'une proposition de Lebesgue (26, 201) selon laquelle pour presque toutes les valeurs de λ , la dérivée $s'(\lambda)$ existe et a 1 comme module.

Signalons que M. Fréchet (19, 294-295) a donné un exemple de courbe rectifiable du plan des (ξ_1, ξ_2) qui initialement possède une tangente et telle toutefois que $s'(0)$ n'existe pas ; cependant au point initial $\chi_a = 1$. Il existe, en accord avec le théorème IV, une représentation paramétrique ayant pour la valeur initiale une dérivée $\neq 0$, à savoir la représentation $\xi_2 =$ fonction de ξ_1 .

Si au point p_0 sur la courbe c , la longueur d'arc est un infiniment petit équivalent à la corde et si p_1, p_2, p_3 représentent trois points variables sur c de supports p_1, p_2, p_3 distincts, encadrant p_0 (c'est-à-dire ni tous $\leq p_0$, ni tous $\geq p_0$), le triangle de sommets p_1, p_2, p_3 a un angle tendant vers 0 lorsque p_1, p_2, p_3 convergent simultanément vers p_0 .

1.25. *Problème (global) de M. Fréchet (21, 334).* — Ce problème s'énonce ainsi :

⟨ une courbe c d'un espace euclidien admettant en chaque point
 sur elle une tangente, est-il possible d'en donner une représentation
 paramétrique p admettant partout (sinon presque partout) une
 dérivée $\neq$ vecteur nul ?

M. Valiron (47, 46-51) a montré que sous l'hypothèse que la tangente soit partout ordinaire et varie continuellement, c est rectifiable et que la représentation de c au moyen de la longueur d'arc a partout une dérivée de module 1.

Nous avons vu qu'une courbe peut avoir partout une tangente sans admettre une représentation paramétrique ayant partout une dérivée $\neq 0$, cependant M. Ward (49, 280-288) a indiqué dans le cas général une représentation w de c qui, presque partout sur l'inter-

valle de définition a une dérivée $\mathbf{w}' \neq \mathbf{0}$. Nous complétons le résultat de M. Ward ainsi :

THÉORÈME VI. — *C étant une courbe de l'espace euclidien E_n dont le contingent en chaque point sur elle laisse échapper une variété linéaire $(n - 1)$ -dimensionnelle, toute représentation propre $\mathbf{p}$ de C admet presque partout sur son intervalle de définition une dérivée $\neq$ vecteur nul ⁽¹⁴⁾.*

1.26. *Points contrariants.* — La condition qui intervient dans l'énoncé du théorème IV s'obtient aussitôt par traduction géométrique à partir de celle qui intervient dans la résolution du problème d'analyse associé au problème local de M. Fréchet ; elle se laisse légèrement transformer sous une forme plus imagée ainsi :

C représentant une courbe d'un espace distancié, $\mathbf{p}'$ et $\mathbf{p}''$ deux points sur elle de supports p' et p'' , avec $\mathbf{p}' < \mathbf{p}''$, nous appelons avec M. Fréchet *oscillation de C entre $\mathbf{p}'$ et $\mathbf{p}''$* le diamètre $\omega_{\mathbf{p}'\mathbf{p}''}$ du segment $C_{\mathbf{p}'\mathbf{p}''}$ que parcourt $\mathbf{p}$ en allant de $\mathbf{p}'$ à $\mathbf{p}''$ toujours dans le même sens et nous disons qu'en un point $\mathbf{p}_0$ sur C , *l'oscillation est un infiniment petit équivalent à la corde* lorsque le rapport

$$\frac{\omega_{\mathbf{p}'\mathbf{p}''}}{\delta(p'p'')}, \text{ posé } = \infty \text{ si } p' = p''$$

tend vers 1 pour $\left. \begin{matrix} \mathbf{p}' \\ \mathbf{p}'' \end{matrix} \right\} \rightarrow \mathbf{p}_0$ avec $\mathbf{p}' \leq \mathbf{p}_0 \leq \mathbf{p}''$

Alors :

THÉORÈME IV*. — *Si la courbe C admet en $\mathbf{p}_0$ une tangente, une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une représentation paramétrique propre $\mathbf{p}$ de C possédant pour la valeur τ_0 du paramètre de $\mathbf{p}_0$ une dérivée $\neq \mathbf{0}$, est que en $\mathbf{p}_0$ l'oscillation soit un infiniment petit équivalent à la corde.*

Par *point contrariant* d'une courbe d'un espace distancié, nous entendons un point sur la courbe où l'oscillation n'est pas un infiniment petit équivalent à la corde ; au moyen de cette notion nous pouvons préciser le problème de M. Fréchet ainsi :

(14) D'où résulte un théorème de M. Roger suivant lequel pour presque toutes les valeurs du paramètre τ , C admet en $\mathbf{p} : \mathbf{p}(\tau)$ une tangente.

« $\mathcal{C}$ étant une courbe euclidienne ayant partout une tangente, peut-on
 « en trouver une représentation paramétrique partout dérivable, la
 « dérivée ne s'annulant que pour les valeurs du paramètre correspon-
 « dant aux points contrariants.

Soit f la représentation de Fréchet (19, 281-297) d'une courbe euclidienne $\mathcal{C}$; elle jouit de la propriété que sa dérivée là où elle existe est $\neq 0$; par conséquent si σ_0 est le paramètre d'un point contrariant sur $\mathcal{C}$, f n'admet certainement pas de dérivée en σ_0 .

1.27. *Contrariances d'une courbe ou d'un continu en un point.* — Reprenant les notations de l'alinéa précédent, nous définissons la *contrariance* $\chi_{\mathcal{C}}(\mathfrak{p}_0)$ d'une courbe $\mathcal{C}$ d'un espace distancié en un point $\mathfrak{p}_0$ sur elle comme la limite supérieure du rapport

$$\frac{\omega_{\mathfrak{p}'\mathfrak{p}''}}{\delta(p'p'')}$$

lorsque $\left. \begin{smallmatrix} \mathfrak{p}' \\ \mathfrak{p}'' \end{smallmatrix} \right\} \rightarrow \mathfrak{p}_0$; nous parlons de *contrariance mixte* si nous imposons à $\mathfrak{p}'$ et $\mathfrak{p}''$ d'encadrer $\mathfrak{p}_0$ c'est-à-dire de vérifier $\mathfrak{p}' \leq \mathfrak{p}_0 \leq \mathfrak{p}''$. Ces contrariances sont toujours ≥ 1 ; un point contrariant est un point où la contrariance mixte est > 1 .

Par analogie nous définissons la contrariance $\chi_{\mathcal{C}}(c_0)$ pour un continu distancié $\mathcal{C}$ en un de ses points c_0 de la manière suivante :

c' et c'' représentant deux points quelconques distincts de $\mathcal{C}$ nous notons par $\omega_{\mathcal{C}}(c', c'')$ l'oscillation de $\mathcal{C}$ entre c' et $c'' =$ borne inférieure des diamètres des sous-continus de $\mathcal{C}$ contenant à la fois c' et c'' ⁽¹⁵⁾, puis par $\chi_{\mathcal{C}}(c', c'')$ le rapport

$$\frac{\omega_{\mathcal{C}}(c'c'')}{\delta(c'c'')} \quad \text{qui est } \geq 1.$$

Nous posons alors

$$\chi_{\mathcal{C}}(c_0) = \lim_{\left. \begin{smallmatrix} c' \\ c'' \end{smallmatrix} \right\} \rightarrow c_0} \sup \chi_{\mathcal{C}}(c', c'')$$

Si A est un arc, $\mathcal{A}$ la courbe obtenue en fixant sur lui un sens de parcours, a un point de A , $\mathfrak{a}$ le point sur $\mathcal{A}$ de support a , il est clair que

$$\chi_A(a) = \chi_{\mathcal{A}}(\mathfrak{a}).$$

⁽¹⁵⁾ Notion due à Mazurkiewitz (25, 157); la limite supérieure de $\omega(c', c'')$ pour $\left. \begin{smallmatrix} c' \\ c'' \end{smallmatrix} \right\} \rightarrow c_0$ est l'oscillation du continu en c_0 étudiée par M. Wilson.

En un point de non connexité locale d'un continu, la contrariance est infinie ; elle peut d'ailleurs être infinie en un point de connexité locale ; c'est le cas pour l'arc

$$\rho = \omega \cdot \left(1 + \omega + \sin \frac{1}{\omega} \right) \quad \text{si } \frac{\pi}{2} \leq \omega > 0, \quad , \quad = 0 \quad \text{si } \omega = 0$$

à l'origine des coordonnées.

Il résulte d'un théorème de M. Menger (29, 89) que si C est un continu distancié complet et convexe, quels que soient c' et c'' distincts de C

$$\omega_c(c', c'') = \delta(c' c'') ;$$

donc en tout point de C, la contrariance est égale à 1.

Nous avons démontré que la contrariance d'un continu distancié compact et quasi-convexe (3) est en chacun de ses points ≤ 2 .

Le processus de définition de la contrariance d'un continu consiste en somme dans la comparaison de $\omega_c(c' c'')$ à $\delta(c' c'')$ au voisinage d'un point ; une notion analogue s'obtiendrait dans le cas où C est un continu de Jordan (16) en comparant la longueur d'un arc géodésique de C entre c' et c'' à la distance $\delta(c' c'')$ (17).

1.3. Tangente au sens strict à un ensemble. — E désignant un ensemble de l'espace euclidien $\mathcal{E}_n$, e_0 un de ses points d'accumulation nous appelons *paratingente* à E en e_0 une droite D telle qu'il existe deux suites $e'_1, \dots, e'_m, \dots, e''_1, \dots, e''_m, \dots$ de points de E avec $e'_m \neq e''_m$ ($m = 1, 2, \dots$) convergeant vers e_0 et vérifiant

$$\lim_{m \rightarrow \infty} D(e'_m, e''_m) = D,$$

tangente au sens strict à E en e_0 (Tangente im scharfen Sinne de MM. Busemann et Feller, 12, 6) une droite D_0 telle que, quelles que soient les deux suites $e'_1, \dots, e'_m, \dots, e''_1, \dots, e''_m, \dots$ de points de E avec $e'_m \neq e''_m$ ($m = 1, 2, \dots$) convergeant vers e_0 , nous ayons

$$\lim_{m \rightarrow \infty} D(e'_m, e''_m) = D_0.$$

(16) C'est-à-dire un continu localement connexe en chacun de ses points. Un continu de Jordan est aussi l'image continue d'un segment (Streckenbild) ; il jouit de la propriété que deux quelconques de ses points sont reliables sur lui par un arc.

(17) Cf. la définition de la sinuosité d'un ensemble plan d'aire nulle en un point frontière due à M. Denjoy (14, 1048).

Nous disons que E jouit en e_0 de la propriété I_{strict} , en abrégé I_{str} , lorsqu'il y admet une tangente au sens strict D_0 , c'est-à-dire une paratingente unique. Une tangente à E en e_0 au sens strict est *à fortiori* une tangente au sens habituel ; par conséquent la propriété I_{str} implique la propriété I .

1.31. Structure locale d'un ensemble en un point où il admet une tangente au sens strict. — Intéressons-nous d'abord à un continu plan C qui en un de ses points c_0 possède une tangente au sens strict D_0 ; le paratingent de C en c_0 (ensemble des paratingentes à C en c_0) laisse échapper toutes les droites distinctes de D_0 , donc d'après un lemme d'univocité de *M. Bouligand* (6, 78-79), un voisinage de c_0 sur C ⁽¹⁸⁾ est un arc lequel, si nous choisissons deux axes de coordonnées ox_1, ox_2 , ce dernier non parallèle à D_0 , se laisse représenter sous la forme $\xi_2 = \psi(\xi_1)$; désignons par $\xi_1^{(0)}$ et $\xi_2^{(0)}$ les coordonnées de c_0 , par $\pi(D_0)$ la pente de D_0 : ψ est définie et continue sur un intervalle $[\gamma_1 \gamma_2]$ avec $\gamma_1 < \gamma_2$, contenant $\xi_1^{(0)}$; ξ_1' et ξ_1'' représentant deux valeurs distinctes quelconques de $[\gamma_1 \gamma_2]$ le rapport

$$\frac{\psi(\xi_1'') - \psi(\xi_1')}{\xi_1'' - \xi_1'}$$

a $\pi(D_0)$ comme limite lorsque $\left. \begin{matrix} \xi_1' \\ \xi_1'' \end{matrix} \right\} \rightarrow \xi_1^{(0)}$; fixant dans l'expression précédente ξ_1' en $\xi_1^{(0)}$, nous voyons que la dérivée $\psi'(\xi_1^{(0)})$ existe et est égale à $\pi(D_0)$.

Nous disons qu'une fonction $\varphi(\tau)$ définie et continue sur un intervalle $[\alpha \beta]$ avec $\alpha < \beta$ admet pour la valeur τ_0 de cet intervalle une *dérivée première finie continue au sens large* $= \varpi$ lorsque τ' et τ'' représentant deux valeurs distinctes quelconques de $[\alpha \beta]$, le rapport

$$\frac{\varphi(\tau'') - \varphi(\tau')}{\tau'' - \tau'}$$

tend vers ϖ lorsque $\left. \begin{matrix} \tau' \\ \tau'' \end{matrix} \right\} \rightarrow \tau_0$.

⁽¹⁸⁾ Nous appelons selon *M. Fréchet* voisinage d'un point x dans un espace topologique un ensemble auquel x est intérieur ; si E est un ensemble de l'espace, par voisinage de x sur E , nous entendons l'intersection de E avec un voisinage de x .

Cette propriété est équivalente à l'une ou l'autre des suivantes :

1) φ admet en τ_0 une dérivée $\varphi'(\tau_0) = \omega$ et la dérivée supérieure $\overline{\varphi}(\tau)$ ainsi que la dérivée inférieure $\underline{\varphi}(\tau)$ ont toutes deux une limite $= \varphi'(\tau_0)$ lorsque $\tau \rightarrow \tau_0$;

2) φ admet en τ_0 une dérivée $\varphi'(\tau_0) = \omega$ et sur un intervalle $[\tau_0 - \varepsilon, \tau_0 + \varepsilon]$ ($[\tau_0, \tau_0 + \varepsilon]$ si $\tau_0 = \alpha$, $[\tau_0 - \varepsilon, \tau_0]$ si $\tau_0 = \beta$) avec $\varepsilon > 0$, $\varphi'(\tau)$ existe presque partout et en se limitant aux τ où elle existe

$$\lim_{\tau \rightarrow \tau_0} \varphi'(\tau) = \varphi'(\tau_0).$$

Exemple. — Soit Δ le discontinu de Cantor relatif à l'intervalle $I = [0, 1]$; définissons sur I une fonction φ ainsi :

si τ appartient à Δ

$$\varphi(\tau) = \tau^2,$$

si τ appartient à $(I - \Delta)$, τ_1 et τ_2 désignant les extrémités du sous-intervalle de I , contigu à Δ et contenant τ , $\varphi(\tau) =$ ordonnée du point d'abscisse τ sur la droite du plan des (ξ_1, ξ_2) joignant (τ_1, τ_1^2) à (τ_2, τ_2^2) .

Alors : si τ_0 désigne une valeur de Δ , φ y admet une dérivée égale à $2\tau_0$, continue au sens large mais non au sens ordinaire car dans tout voisinage de τ_0 sur I se trouvent des valeurs pour lesquelles φ' n'existe pas.

THÉORÈME VII. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un continu C de $\mathcal{E}_n$ admette en un de ses points c_0 une tangente au sens strict D_0 est que*

un voisinage de c_0 sur C soit un arc rectifiable A ayant en c_0 la droite D_0 comme tangente, tel qu'en choisissant un système d'axes $c_0x_1, \dots, c_0x_m, c_0x_1$ ne se trouvant pas sur D_0 , il se laisse représenter par

$$\xi_2 = \psi_2(\xi_1), \dots, \quad \xi_n = \psi_n(\xi_1)$$

les fonctions $\psi_2, \dots, \psi_n$ étant définies et continues sur un intervalle contenant 0 et admettant pour cette valeur des dérivées premières finies continues au sens large.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble E de $\mathcal{E}_n$ admette en un de ses points d'accumulation c_0 une tangente au sens strict D_0 est qu'un voisinage de c_0 sur E soit inclus dans un arc du type précédent.

1.4 Tangente au sens strict à une courbe. — $\mathcal{C}$ désignant une courbe de l'espace euclidien $\mathcal{E}_n$ non réduite à un point, $\mathfrak{p}_0$ un point situé sur elle, nous appelons

paratingente à $\mathcal{C}$ en $\mathfrak{p}_0$ une droite D telle qu'il existe deux suites $\mathfrak{p}'_1, \dots, \mathfrak{p}'_m, \dots$ $\mathfrak{p}''_1, \dots, \mathfrak{p}''_m, \dots$ de points sur $\mathcal{C}$ de supports respectifs $p'_1, \dots, p'_m, \dots$, $p''_1, \dots, p''_m, \dots$ avec $p'_m \neq p''_m$ ($m = 1, 2, \dots$) convergeant vers $\mathfrak{p}_0$ et vérifiant

$$\lim_{m \rightarrow \infty} D(p'_m, p''_m) = D;$$

tangente au sens strict à $\mathcal{C}$ en $\mathfrak{p}_0$ une droite D_0 telle que, quelles que soient les deux suites $\mathfrak{p}'_1, \dots, \mathfrak{p}'_m, \dots$ $\mathfrak{p}''_1, \dots, \mathfrak{p}''_m, \dots$ de points sur $\mathcal{C}$ de supports respectifs $p'_1, \dots, p'_m, \dots$, $p''_1, \dots, p''_m, \dots$ avec $p'_m \neq p''_m$ ($m = 1, 2, \dots$), convergeant vers $\mathfrak{p}_0$, nous ayons

$$\lim_{m \rightarrow \infty} D(p'_m, p''_m) = D_0.$$

Nous disons que $\mathcal{C}$ jouit en $\mathfrak{p}_0$ de la propriété $I_{\text{str.}}$ lorsqu'il y admet une tangente au sens strict D_0 , c'est-à-dire encore une paratingente unique. La propriété $I_{\text{str.}}$ implique la propriété I . Il est aisé de voir que si une courbe $\mathcal{C}$ admet en $\mathfrak{p}_0$ une tangente au sens strict, un voisinage de $\mathfrak{p}_0$ sur $\mathcal{C}$ ⁽¹⁹⁾ est, si nous en négligeons le sens de parcours, un arc du type mentionné dans le théorème VII.

Désormais nous ne ferons plus de différence entre la propriété $I_{\text{str.}}$ pour un continu et pour une courbe, en particulier nous ne définirons par la suite les propriétés II et $II_{\text{str.}}$ qui impliquent $I_{\text{str.}}$ que pour un ensemble ; il faudra cependant dans la transcription de ces propriétés pour une courbe avoir présent à l'esprit qu'il s'agit de propriétés en un point sur la courbe et qu'une courbe possède un sens de parcours.

1.41. Interprétation analytique. — Soit $\mathbf{p}$ une représentation paramétrique d'une courbe $\mathcal{C}$ de $\mathcal{E}_n$ non réduite à un point, définie sur l'intervalle $[\alpha\beta]$, τ_0 une valeur de $[\alpha\beta]$ fixée à laquelle correspond le point $\mathfrak{p}_0$ sur $\mathcal{C}$, τ' et τ'' deux valeurs variables distinctes de $[\alpha\beta]$, $p_0 = \mathbf{p}(\tau_0)$, $p' = \mathbf{p}(\tau')$, $p'' = \mathbf{p}(\tau'')$, nous disons

⁽¹⁹⁾ Entendant par là un segment $\mathcal{C}_{\mathfrak{p}'\mathfrak{p}''}$ de $\mathcal{C}$ avec $\mathfrak{p}' < \mathfrak{p}_0 < \mathfrak{p}''$ si $\mathfrak{p}'$ est intérieur, $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}_0 < \mathfrak{p}''$ si $\mathfrak{p}_0$ est initial, $\mathfrak{p}' < \mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p}''$ si $\mathfrak{p}_0$ est final.

que $\mathbf{p}$ admet en τ_0 une *dérivée première* $= \nu_0$ continue au sens large lorsque le vecteur

$$\mathbf{v}(\tau', \tau'') = \frac{\overrightarrow{p'p''}}{\tau'' - \tau'}$$

a ν_0 comme limite lorsque $\left. \begin{matrix} \tau' \\ \tau'' \end{matrix} \right\} \rightarrow \tau_0$.

Dans ce cas

si $\nu_0 \neq \mathbf{0}$; la courbe $\mathcal{C}$ possède en $\mathbf{p}_0$ une tangente au sens strict qui est la droite supportant ν_0 ,

si $\nu_0 = \mathbf{0}$ il peut arriver que $\mathcal{C}$ ne présente au point $\mathbf{p}_0$ aucune particularité géométrique.

Inversement, si la courbe $\mathcal{C}$ possède en $\mathbf{p}_0$ une tangente au sens strict D_0 : un voisinage de $\mathbf{p}_0$ sur $\mathcal{C}$ est un arc rectifiable $\mathcal{A}$; s désignant la représentation paramétrique de $\mathcal{A}$ au moyen de la longueur d'arc λ , la fonction s admet pour l'abscisse curviligne λ_0 de p_0 sur $\mathcal{A}$ une dérivée première de module un continue au sens large ; les segments de $\mathcal{A}$ voisins de p_0 ont une longueur infiniment petite équivalente à leur corde.

1.42. Tangente au sens strict et tangente continue. — Une tangente au sens strict à un ensemble E de $\mathcal{E}_n$ en un de ses points d'accumulation est une tangente jouissant d'une propriété de continuité au sens large ; dans le cas où E est un continu, ceci est précisé par le théorème suivant :

THÉORÈME VIII. — *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un continu C de $\mathcal{E}_n$ possède en un de ses points c_0 une tangente au sens strict D_0 est que :*

un voisinage de c_0 sur C soit un arc rectifiable A admettant après fixation d'un sens de parcours, D_0 comme tangente ordinaire en c_0 et que, en nous bornant à ne considérer que les points c de A où existe une tangente ordinaire, nous ayons

$$\lim_{c \rightarrow c_0} (\text{tangente orientée en } c) = \text{tangente orientée en } c_0.$$

La nécessité de faire intervenir la tangente orientée apparaît sur l'exemple suivant :

m représentant un entier > 0 quelconque, introduisons dans le plan des (ξ_1, ξ_2) les points suivants

$$a_m = \left(\frac{1}{2^m}, 0 \right)$$

$$b_m^+ = \left(\frac{1}{2^m} \cdot \left(1 + \frac{1}{m} \right), \frac{1}{m^2 \cdot 2^m} \right) \quad b_m^- = \left(\frac{1}{2^m} \cdot \left(1 + \frac{1}{m} \right), \frac{-1}{m^2 \cdot 2^m} \right)$$

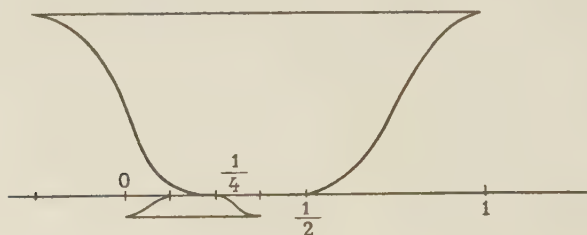
$$c_m^+ = \left(\frac{1}{2^{m+1}} \cdot \left(1 - \frac{2}{m} \right), \frac{1}{m^2 \cdot 2^m} \right) \quad c_m^- = \left(\frac{1}{2^{m+1}} \cdot \left(1 - \frac{2}{m} \right), \frac{-1}{m^2 \cdot 2^m} \right)$$

et désignons par A_m^+ la ligne polygonale $a_m b_m^+ c_m^+ a_{m+1}$, par A_m^- la ligne polygonale $a_m b_m^- c_m^- a_{m+1}$, par C la ligne polygonale infinie

$$L = A_1^+ + A_2^- + A_3^+ + A_4^- + A_5^+ + \dots$$

complétée par le point $o = (0, 0)$.

C est un arc rectifiable ; convenons de le parcourir de o vers a_1 , il admet alors en o l'axe des ξ_1 comme tangente orientée ; sauf aux sommets de L en infinité dénombrable, C admet une tangente qui aux points voisins de o fait un angle très petit avec la tangente en o ; cependant le paratingent de C en o comprend toutes les directions du plan. En fait, la tangente orientée aux points c de C voisins de o fait avec la tangente orientée en o un angle très proche de 0 ou de π ; lorsque $c \rightarrow o$, elle possède deux positions limites l'axe des ξ_1 et l'axe opposé.



M. VALIRON (47, 51) indique un exemple d'une courbe plane admettant en chaque point une tangente variant continuellement et présentant cependant un point contrariant ; le paratingent de la courbe en ce dernier point est alors nécessairement complet. Si

dans notre exemple nous substituons aux segments non horizontaux de L des arcs comme le fait comprendre la figure, nous mettons en évidence le même phénomène.

Notons que :

si un voisinage du point c_0 sur le continu C est un arc A admettant en chacun de ses points une tangente ordinaire continue en c_0 , alors C admet en c_0 une tangente au sens strict qui est la tangente en A à c_0 .

THÉORÈME IX (Cf. 6, 79). — *Un continu euclidien borné C admettant en chacun de ses points une tangente au sens strict est un arc ou un cercle topologique ⁽²⁰⁾ rectifiable ; un sens de parcours étant fixé sur C , la représentation s de la courbe ainsi obtenue au moyen de la longueur d'arc λ jouit partout d'une dérivée $s'(\lambda)$ de module un, fonction continue de λ .*

2. Courbures d'ensembles. Propriétés II et II_{str.} — Nous avons obtenu la notion de tangente à un ensemble E en un de ses points d'accumulation e_0 en considérant des suites de couples (e'_m, e''_m) de points distincts de E convergeant vers e_0 ; suivant que e'_m est fixé en e_0 ou laissé libre de converger de manière quelconque vers e_0 , nous définissons la tangente au sens habituel ou la tangente au sens strict, notions qui relèvent de la topologie restreinte du premier ordre. Nous allons faire intervenir des propriétés du second ordre de E en e_0 en considérant des suites de triplets (e'_m, e''_m, e'''_m) de points distincts de E convergeant vers e_0 ; à tout triplet (p, q, r) de points distincts de E , nous attachons avec M. Menger (30, 480) un nombre $\kappa(p, q, r)$ que nous appelons sa courbure, définie comme égale à l'inverse du rayon du cercle passant par p, q, r si ces trois points ne sont pas alignés, à 0 si p, q, r sont alignés et nous considérons les limites de $\kappa(e'_m, e''_m, e'''_m)$ lorsque e'_m, e''_m, e'''_m convergent simultanément vers 0 soit indépendamment l'un de l'autre soit en étant soumis à certaines restrictions. Suivant la nature de ces restrictions, nous obtiendrons des notions de courbure différentes.

2.1. Courbure de Alt. — Par courbure inférieure $\underline{\kappa}_{e_0}(E)$ et

(20) = image d'un cercle par homéomorphie.

courbure supérieure $\overline{\kappa}_{e_0}(E)$ de Alt ⁽²¹⁾ d'un ensemble E en un de ses points d'accumulation e_0 , nous entendons la borne inférieure et la borne supérieure respectivement des nombres κ tels qu'il existe deux suites de points de E

$$e'_1, \dots, e'_m, \dots \quad \text{et} \quad e''_1, \dots, e''_m, \dots$$

avec

$$e'_m \neq e_0, e''_m \neq e_0, e'_m \neq e''_m \quad m = 1, 2, \dots$$

convergeant vers e_0 pour lesquelles

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \kappa(e'_m, e_0, e''_m) = \kappa.$$

Nous disons que E jouit en e_0 de la *propriété II* lorsqu'il a en ce point une *courbure de Alt finie* c'est-à-dire lorsque

$$\kappa_{e_0}(E) = \overline{\kappa}_{e_0}(E) = \text{nombre fini } \kappa_{e_0}(E)$$

THEORÈME X. — Si un ensemble E a en un de ses points d'accumulation e_0 une courbure de Alt finie, il admet en e_0 une tangente au sens strict.

En d'autres termes : la propriété II implique la propriété I_{str.}

2.11. *Structure locale d'un ensemble plan en un point d'accumulation où il admet une courbure de Alt finie.* — M. Alt dans sa Thèse s'est proposé la recherche de conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un arc plan représenté par $\xi_2 = \psi(\xi_1)$, ψ fonction définie et continue sur un intervalle $[\gamma_1, \gamma_2]$ avec $\gamma_1 > \gamma_2$, admette au point $c_0 = (\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)} = \psi(\xi_1^{(0)}))$ une courbure finie en son sens.

Il résulte en particulier de son étude que la courbure de Alt est plus générale que la courbure classique c'est-à-dire qu'il est possible de trouver un arc du type précédent possédant en c_0 une courbure de Alt finie sans posséder de courbure classique

$$\left| \frac{\psi''(\xi_1^{(0)})}{(1 + \psi'^2(\xi_1^{(0)}))^{\frac{3}{2}}} \right|.$$

(21) C'est Alt (2) qui a introduit le premier ces courbures pour un espace distancié en les appelant courbure métrique inférieure et courbure métrique supérieure, (untere, obere metrische Krümmung).

Son exemple est le suivant : il considère sur la parabole $\xi_2 = \xi_1^2$ les points $c'_q = \left(-\frac{1}{q}, \frac{1}{q^2}\right)$ et $c''_q = \left(\frac{1}{q}, \frac{1}{q^2}\right)$, $q = 1, 2, \dots$ puis l'arc constitué par les lignes polygonales $c'_1, \dots, c'_q, \dots$ et $c''_1, \dots, c''_q, \dots$ auxquelles on adjoint le point o ; en ce dernier point l'arc admet une courbure de Alt égale à celle de la parabole soit 2; il ne peut posséder une courbure classique la dérivée seconde ψ'' n'étant pas définie pour $\xi_1 = 0$, puisque tout voisinage $(-\varepsilon, +\varepsilon)$ de ce point contient des valeurs $\frac{1}{q}$ et $-\frac{1}{q}$ pour lesquelles la dérivée première de ψ n'existe pas. Dans l'exemple donné en 1.31, l'arc représentatif de la fonction φ admet aux points correspondants aux valeurs τ appartenant à Δ une courbure de Alt égale à la courbure de la parabole au même point; pour la raison qui vient d'être indiquée, la courbure classique n'est pas définie en ces points.

Si nous cherchons à donner dans tous les cas où elle existe à la courbure de Alt l'expression

$$\frac{|\text{dérivée seconde de } \psi \text{ en } \xi_1^{(0)}|}{(1 + \psi'^2(\xi_1^{(0)}))^{3/2}},$$

nous sommes amenés à introduire une définition plus large de la dérivée seconde. Soit $\varphi(\tau)$ une fonction définie et continue sur un intervalle $[\alpha\beta]$ avec $\alpha < \beta$, τ_0 une valeur fixée de cet intervalle, τ' et τ'' deux valeurs variables distinctes entre elles et distinctes de τ_0 , si nous évaluons la courbure du triplet $(\tau_0, \varphi(\tau_0)), (\tau', \varphi(\tau')), (\tau'', \varphi(\tau''))$, nous voyons apparaître l'expression

$$[\tau_0, \tau', \tau''; \varphi] = \frac{\frac{\varphi(\tau'') - \varphi(\tau_0)}{\tau'' - \tau_0} - \frac{\varphi(\tau') - \varphi(\tau_0)}{\tau' - \tau_0}}{\frac{\tau'' - \tau'}{2}}$$

connue sous le nom de *différence divisée* ⁽²²⁾ du second ordre pour φ et les valeurs distinctes τ_0, τ', τ'' . Nous représentons par

$$\underline{\varphi}(\tau_0) \quad \text{et} \quad \overline{\varphi}(\tau_0)$$

sa limite inférieure et sa limite supérieure lorsque $\left. \begin{matrix} \tau' \\ \tau'' \end{matrix} \right\} \rightarrow \tau_0$; si elles sont égales nous disons que φ admet en τ_0 une *dérivée seconde*

⁽²²⁾ Pour l'étude des différences divisées et de leurs limites, consulter par exemple 39 et 16.

au sens large ⁽²³⁾ égale à leur valeur commune ; nous la notons $\varphi^{**}(\tau_0)$. Relativement à celle-ci nous indiquons les propositions suivantes :

1) Si dans un voisinage de τ_0 sur $[\alpha\beta]$, φ admet une dérivée première φ' , l'existence d'une dérivée seconde finie au sens classique $\varphi''(\tau_0)$ implique l'existence d'une dérivée seconde au sens large $\varphi^{**}(\tau_0)$ égale, et inversement.

2) La dérivée seconde au sens large peut exister sans que la dérivée seconde classique soit définie : la fonction φ de l'exemple donné en 1.31 possède pour toute valeur τ de Δ une dérivée seconde au sens large = 2, la dérivée seconde classique n'est pas définie pour ces valeurs.

3) Si $\varphi^{**}(\tau_0)$ existe et est finie, φ admet en τ_0 une dérivée première $\varphi'(\tau_0)$ finie continue au sens large.

4) L'existence pour la fonction φ d'une dérivée seconde au sens large en τ_0 égale à un nombre fini ϖ équivaut à l'une ou l'autre des propriétés suivantes :

a) $\varphi'(\tau_0)$ existe et est finie et les deux expressions ⁽²⁴⁾

$$\frac{\tilde{\varphi}(\tau) - \varphi'(\tau_0)}{\tau - \tau_0} \quad \frac{\varphi(\tau) - \varphi'(\tau_0)}{\tau - \tau_0}$$

ont une limite = ϖ quand $\tau \rightarrow \tau_0$;

b) $\varphi'(\tau_0)$ existe et est finie et sur un intervalle $[\tau_0 - \varepsilon, \tau_0 + \varepsilon]$ ($[\tau_0, \tau_0 + \varepsilon]$ si $\tau_0 = \alpha$, $[\tau_0 - \varepsilon, \tau_0]$ si $\tau_0 = \beta$), $\varepsilon > 0$, la dérivée φ' existe presque partout et en nous bornant aux τ où elle existe, le rapport

$$\frac{\varphi'(\tau) - \varphi'(\tau_0)}{\tau - \tau_0}$$

tend vers ϖ pour $\tau \rightarrow \tau_0$.

THÉORÈME XI. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un continu plan C admette au point c_0 situé sur lui une courbure finie de Alt, est qu'un voisinage de c_0 sur C soit un arc A représentable ⁽²⁵⁾ par $\xi_2 = \psi(\xi_1)$, la fonction ψ étant définie et continue sur un intervalle $[\gamma_1\gamma_2]$ avec $\gamma_1 < \gamma_2$ et admettant pour l'abscisse $\xi_1^{(0)}$ de c_0 une dérivée seconde au sens large $\psi^{**}(\xi_1^{(0)})$ finie.*

⁽²³⁾ La définition des dérivées de tous ordres comme limites simples de différences divisées se trouve dans 18.

⁽²⁴⁾ introduites par Alt (2, 15) ; la proposition correspondante lui est principalement due.

⁽²⁵⁾ dans un système d'axes convenable.

L'expression de la courbure de Alt $\kappa_{c_0}(C)$ est alors

$$\frac{|\psi^{**}(\xi_1^{(0)})|}{(1 + \psi'^2(\xi_1^{(0)}))^{3/2}}.$$

Posons pour un triplet (p, q, r) de points distincts du plan des (ξ_1, ξ_2)

$$\text{signe de } (p, q, r) = \begin{cases} 0 & \text{si } p, q, r, \text{ sont alignés} \\ +1 \text{ ou } -1 & \text{suivant que le sens de la rotation } < \pi \\ & \text{amenant le rayon } \mathbf{R}(pq) \text{ sur le rayon } \mathbf{R}(pr) \text{ est direct} \\ & \text{ou inverse, si } p, q, r \text{ ne sont pas alignés;} \end{cases}$$

alors

si $\psi^{**}(\xi_1^{(0)})$ est $\neq 0$, les triplets constitués par trois points sur A d'abscisse croissante dont l'un est en c_0 et qui sont suffisamment voisins de c_0 , sont du signe de $\psi^{**}(\xi_1^{(0)})$.

Remarque. — Lorsque l'arc représentatif de la fonction continue $\varphi(\tau)$ définie sur $[\alpha\beta]$ possède en $p_0 = (\tau_0, \varphi(\tau_0))$ une courbure de Alt finie κ , si κ est $\neq 0$, nous pouvons affirmer que $\varphi^{**}(\tau_0)$ existe et est finie $\neq 0$; par contre si $\kappa = 0$, la tangente à l'arc en p_0 peut être verticale, par exemple pour $\varphi(\tau) = \sqrt[3]{\tau}$, $-1 \leq \tau \leq 1$, $\tau_0 = 0$ et $\varphi^{**}(\tau_0)$ n'existe pas.

THÉORÈME XII. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble plan E admette en un de ses points d'accumulation c_0 une courbure finie de Alt est qu'un voisinage de c_0 sur E soit inclus dans un arc A du type mentionné dans l'énoncé du théorème XI.*

2.12. Structure locale d'un ensemble euclidien en un point d'accumulation où il admet une courbure de Alt finie. — Pour étendre aux continus, plus généralement aux ensembles euclidiens quelconques les résultats de l'alinéa précédent, nous généralisons au domaine vectoriel la notion de dérivée seconde au sens large :

soit $\mathbf{p}(\tau)$ un point de $\mathcal{E}_n$ se déplaçant continuellement lorsque la variable τ parcourt l'intervalle de nombres $[\alpha\beta]$, $\alpha < \beta$, τ_0 une valeur située sur cet intervalle, τ' et τ'' deux autres valeurs distinctes entre elles et distinctes de τ_0 , nous introduisons le vecteur

$$[\tau_0, \tau', \tau''; \mathbf{p}] = \frac{\frac{\overrightarrow{p_0 p''}}{\tau'' - \tau_0} - \frac{\overrightarrow{p_0 p'}}{\tau' - \tau_0}}{\frac{\tau'' - \tau'}{2}} \quad \begin{aligned} p_0 &= \mathbf{p}(\tau_0) \\ p' &= \mathbf{p}(\tau') \\ p'' &= \mathbf{p}(\tau'') \end{aligned}$$

et nous disons que la fonction $\mathbf{p}$ admet en τ_0 une *dérivée seconde au sens large* lorsque ce vecteur a une limite quand $\left. \begin{smallmatrix} \tau' \\ \tau'' \end{smallmatrix} \right\} \rightarrow \tau_0$; nous la désignons par $\mathbf{p}^{**}(\tau_0)$. Mentionnons à son sujet les propositions suivantes :

1) Si la fonction $\mathbf{p}$ admet sur un voisinage de τ_0 dans $[\alpha\beta]$ une dérivée première $\mathbf{p}'(\tau)$, l'existence de la dérivée seconde au sens classique $\mathbf{p}''(\tau_0)$ implique l'existence d'une dérivée seconde au sens large $\mathbf{p}^{**}(\tau_0)$ égale et inversement.

2) Si $\mathbf{p}^{**}(\tau_0)$ existe, $\mathbf{p}$ admet en τ_0 une dérivée première $\mathbf{p}'(\tau_0)$ continue au sens large.

3) L'existence pour la fonction $\mathbf{p}$ d'une dérivée seconde au sens large en τ_0 égale à $\mathbf{g}_0$ équivaut à la propriété suivante : $\mathbf{p}'(\tau_0)$ existe ; dans un intervalle $[\tau - \varepsilon \tau_0 + \varepsilon]$ ($[\tau_0 \tau_0 + \varepsilon]$ si $\tau_0 = \alpha$, $[\tau_0 - \varepsilon \tau_0]$ si $\tau_0 = \beta$), $\mathbf{p}$ est presque partout dérivable et en se bornant aux τ où $\mathbf{p}'(\tau)$ existe, le vecteur

$$\frac{\mathbf{p}'(\tau) - \mathbf{p}'(\tau_0)}{\tau - \tau_0}$$

tend vers $\mathbf{g}_0$ quand $\tau \rightarrow \tau_0$.

A l'existence pour la fonction $\mathbf{p}$ d'une dérivée seconde classique $\mathbf{p}''(\tau_0)$ correspond dans le cas général où les vecteurs $\mathbf{p}'(\tau_0)$ et $\mathbf{p}''(\tau_0)$ sont linéairement indépendants l'existence d'une courbure et d'un plan ⁽²⁶⁾ osculateur pour la courbe $\mathcal{C} : \mathbf{p}[\alpha\beta]$ au point $\mathbf{p}_0 : \mathbf{p}(\tau_0)$; il est facile de montrer que inversement, si une courbe $\mathcal{C}$ admet en un point $\mathbf{p}_0$ une courbure et un plan osculateur au sens classique, il existe une représentation paramétrique propre $\mathbf{p}$ de $\mathcal{C}$ telle que τ_0 désignant la valeur du paramètre correspondant à $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}''(\tau_0)$ existe. La discussion qui suit montre que la dérivée seconde au sens large permet les mêmes conclusions en substituant à la notion de courbure classique celle de courbure de Alt et à la notion de plan osculateur classique celle de plan osculateur de Alt ⁽²⁷⁾ : nous disons qu'un ensemble E de l'espace euclidien $\mathcal{E}_n$ admet en un de ses points d'accumulation e_0 un plan osculateur au sens de Alt P_0 lorsque $e'_1, \dots, e'_m, \dots, e''_1, \dots, e''_m, \dots$ étant deux suites quelconques de points de E convergeant vers e_0 et telles que, quel

⁽²⁶⁾ plan est ici entendu comme dans la suite au sens de variété linéaire à deux dimensions.

⁽²⁷⁾ Nous introduisons cette dénomination par analogie.

que soit m, e'_m, e_0 et e''_m définissent un plan $P(e'_m, e_0, e''_m)$, nous avons

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P(e'_m, e_0, e''_m) = P_0;$$

de là découle naturellement la définition du plan osculateur de Alt pour une courbe c en un point p_0 sur elle.

Indiquons les propriétés géométriques d'une courbe $c: p[\alpha\beta]$ en un point $p_0: p(\tau_0)$ lorsque p admet en τ_0 une dérivée seconde au sens large; posons $v_0 = p'(\tau_0)$, $g_0 = p''(\tau_0)$; différents cas sont à distinguer:

I g_0 et v_0 sont linéairement indépendants; alors: c admet en p_0 une courbure de Alt non nulle

$$\kappa_{p_0}(c) = \frac{|v_0 \wedge g_0|}{|v_0|^3} \quad (28)$$

et un plan osculateur de Alt déterminé par v_0 et g_0 ; un voisinage de p_0 sur c est un arc ⁽²¹⁾ rectifiable que nous pouvons représenter au moyen de l'abscisse curviligne λ comptée à partir de p_0 ; cette représentation s'admet pour $\lambda = 0$ une dérivée première v_0^* et une dérivée seconde au sens large g_0^* telles que

$$|v_0^*| = 1 \quad v_0^* \cdot g_0^* = 0 \quad \kappa_{p_0}(c) = |g_0^*|.$$

II g_0 et v_0 sont $\neq 0$ et colinéaires } c a en p_0 une courbure de
ou bien: $v_0 \neq 0$ mais $g_0 = 0$ } Alt nulle;
le plan osculateur de Alt peut ne pas exister.

III $v_0 = 0$, $g_0 \neq 0$: si p_0 est intérieur, c admet un rebroussement en p_0 , la demi-tangente de rebroussement étant le rayon qui porte g_0 .

IV $v_0 = 0$, $g_0 = 0$: nous ne pouvons plus rien affirmer ⁽³⁰⁾ de c en p_0 même pas l'existence d'une tangente comme nous le voyons au point origine sur la courbe de E_3

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_1 = \tau^3 \cos \frac{1}{\tau} \\ \xi_2 = \tau^3 \sin \frac{1}{\tau} \\ \xi_3 = \tau^3 \end{array} \right. \quad \text{si } 0 < \tau \leq 1 \quad \left\{ \begin{array}{ll} \xi_1 = 0 \\ \xi_2 = 0 & \text{si } \tau = 0 \\ \xi_3 = 0 \end{array} \right.$$

⁽²⁸⁾ v et w représentant deux vecteurs de E_n , nous notons par $|v|$ et $|w|$ leurs modules, par $v \wedge w$ leur produit vectoriel, par $v \cdot w$ leur produit scalaire.

⁽²⁹⁾ sous-entendu: doué d'un sens de parcours. Notons la distinction entre l'arc qui est un ensemble et l'arc doué d'un sens de parcours qui est une courbe.

⁽³⁰⁾ Entendant par là que nous pouvons énoncer un théorème analogue au théorème III.

THÉORÈME XIII. — *Si un continu C d'un espace euclidien admet en un de ses points c_0 une courbure de Alt finie, non nulle et un plan osculateur de Alt, un voisinage de c_0 sur C est un arc rectifiable admettant une représentation propre p qui possède pour la valeur τ_0 du paramètre correspondant au point c_0 une dérivée seconde au sens large $\neq 0$; comme paramètre, nous pouvons choisir l'abscisse curviligne comptée à partir de c_0 dans le sens de parcours choisi.*

THÉORÈME XIV. — *Si un continu C d'un espace euclidien admet en un de ses points c_0 une courbure de Alt nulle, un voisinage de c_0 sur C est un arc rectifiable dont la représentation p^* au moyen de l'abscisse curviligne comptée à partir de c_0 possède pour la valeur 0 une dérivée seconde au sens large $= 0$.*

Disons qu'un ensemble euclidien E possède en un de ses points d'accumulation e_0 un cercle de courbure de Alt ⁽²⁷⁾ C_A pouvant être une droite ou un point lorsque le cercle (év. la droite) passant par e_0 et deux points e' et e'' sur E distincts entre eux et distincts de e_0 , a comme limite C_A quand $\left. \begin{matrix} e' \\ e'' \end{matrix} \right\} \rightarrow e_0$; notons les équivalences suivantes :

(E possède en e_0 un cercle de courbure de Alt C_A de rayon fini $\rho_A \neq 0$) $\sim$ $\left((E \text{ a en } e_0 \text{ une courbure de Alt finie non nulle} = \frac{1}{\rho_A}) \text{ et } (E \text{ a en } e_0 \text{ un plan osculateur de Alt} = \text{plan de } C_A) \right)$;

(E possède en e_0 un cercle de courbure de Alt de rayon $= \infty$) $\sim$ (E a en e_0 une courbure de Alt nulle) ;

(E possède en e_0 un cercle de courbure de Alt de rayon nul) $\sim$ (E a en e_0 une courbure de Alt infinie).

M. Bouligand (7, 237) appelle *paracontingent circulaire* d'un ensemble E de $\mathcal{E}_n$ en un de ses points d'accumulation e_0 l'ensemble des cercles C de $\mathcal{E}_n$ (év. droites ou points) tels que, pour chacun d'eux il existe deux suites $e'_1, \dots, e'_m, \dots, e'_1, \dots, e'_m, \dots$ de points de E convergeant vers e_0 vérifiant $e'_m \neq e''_m, e'_m \neq e_0, e''_m \neq e_0$ ($m = 1, 2, \dots$) avec

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (\text{cercle passant par } e_0, e'_m, e''_m) = C.$$

Si E admet en e_0 un cercle de courbure de Alt C_A , le paracontingent circulaire de E en e_0 comprend un seul élément C_A et inversement.

D'après les théorèmes XIII et XIV, il semblerait naturel de désigner par propriété II pour un ensemble euclidien en un point d'accumulation e_0 la propriété de posséder en e_0 un cercle de courbure de Alt de rayon non nul ; nous ne l'avons pas fait à cause des difficultés que présenterait alors l'interprétation métrique.

Abordons enfin les conséquences analytiques de la propriété II dans le cas général d'une courbure de Alt non nulle indépendamment du plan osculateur de Alt.

THÉORÈME XV. — *Si un continu C de l'espace euclidien E_n admet en un de ses points c_0 une courbure de Alt finie $\neq 0$: un voisinage de c_0 sur C est un arc rectifiable dont la représentation s obtenue en prenant comme paramètre l'abscisse curviligne λ comptée à partir de c_0 dans un sens arbitrairement fixé, admet en $\lambda = 0$ une dérivée première v_0 avec $|v_0| = 1$; λ' et λ'' représentant deux valeurs de λ distinctes entre elles et $\neq 0$, le vecteur*

$$[0, \lambda', \lambda''; s] = \frac{\frac{\overrightarrow{c_0 c''}}{\lambda''} - \frac{\overrightarrow{c_0 c'}}{\lambda'}}{\frac{\lambda'' - \lambda'}{2}} \quad \begin{array}{l} c' = s(\lambda') \\ c'' = s(\lambda'') \end{array}$$

n'a pas si $n > 2$ nécessairement une limite lorsque $\left. \begin{array}{l} \lambda' \\ \lambda'' \end{array} \right\} \rightarrow 0$, mais si g désigne une quelconque de ses positions limites, g est $\neq 0$, perpendiculaire à v_0 et

$$|g| = \kappa_{c_0}(C);$$

l'ensemble des g est un continu ou bien comprend un seul élément ; ce dernier cas est le seul qui puisse se présenter lorsque $n = 2$ ce qui revient à dire qu'alors s jouit pour $\lambda = 0$ d'une dérivée seconde au sens large.

Exemple. — L'arc de E_3 défini par

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_1 = \xi_3^3 \sin \frac{1}{\xi_3} \\ \xi_2 = \xi_3^3 \cos \frac{1}{\xi_3} \end{array} \right. \text{ pour } -1 \leq \xi_3 \leq +1, \xi_3 \neq 0, \left\{ \begin{array}{l} \xi_1 = 0 \\ \xi_2 = 0 \end{array} \right. \text{ si } \xi_3 = 0$$

admet au point $o = (0, 0, 0)$ une courbure de Alt $= 1$ qui est d'ailleurs dans ce cas une courbure classique sans admettre de plan osculateur au sens classique comme au sens de Alt ; $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$

considéré comme fonction de l'arc λ compté dans le sens des ξ_3 croissants à partir de o n'a pas de dérivée seconde au sens large pour $\lambda = 0$; les g sont les vecteurs de longueur 1 et d'origine O situés dans le plan des ξ_1, ξ_2 .

La comparaison entre la courbure de Alt et la courbure classique résulte des deux théorèmes suivants :

THÉORÈME XVI. — *En un point p_0 sur une courbe C dans un voisinage duquel existe partout la tangente, les notions de courbure classique et de courbure de Alt sont équivalentes.*

THÉORÈME XVII. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un continu euclidien C admette en un de ses points c_0 une courbure de Alt finie $= \kappa_0$ est que*

un voisinage de c_0 sur C soit un arc rectifiable A possédant, un sens de parcours étant fixé sur lui, une tangente ordinaire en c_0 , et que c désignant un point quelconque de A distinct de c_0 pour lequel existe une tangente ordinaire, le rapport

$$\left(\frac{\text{angle de la tangente orientée en } c \text{ avec la tangente orientée en } c_0}{\text{longueur de l'arc compris entre } c_0 \text{ et } c} \right)$$

ait une limite $= \kappa_0$ lorsque $c \rightarrow c_0$.

Si un ensemble euclidien E possède en un de ses points d'accumulation c_0 une courbure de Alt finie, un voisinage de c_0 dans E est inclus dans un arc A du type précédent et inversement.

2.13. Courbure de Alt infinie. — Jusqu'à présent nous avons étudié la structure locale de continus et d'ensembles possédant en un point une courbure de Alt finie ; nous ne pouvons donner que quelques indications dans le cas d'une courbure de Alt infinie.

Tout d'abord une surface peut jouir en un de ses points d'une telle courbure, ainsi dans $\mathcal{E}_3$ la surface

$$\xi_3^3 = \xi_1^2 + \xi_2^2$$

à l'origine des coordonnées.

Un ensemble E ayant en un de ses points d'accumulation e_0 une courbure de Alt infinie peut y admettre un contingent à une infinité de rayons ; c'est le cas de l'ensemble des points du plan

$$\begin{cases} \xi_1 = e^{-n} \\ \xi_2 = e^{-n \cdot \alpha} + e^{-(n' + n)} \end{cases}$$

où α est une constante comprise entre 1 et 2, n et n' des entiers quelconques assujettis à $n \geq n'$, considéré à l'origine $o = (0, 0)$

M. Alt a dans sa Thèse (2, 18-30) étudié le cas d'une courbe plane $\mathcal{C}$ possédant en un point $\mathfrak{p}_0$ une courbure à son sens infinie ; voici ses résultats les plus importants :

1) La courbe $\mathcal{C}$ peut jouir en $\mathfrak{p}_0$ d'une courbure infinie en son sens sans y posséder une courbure classique infinie et inversement.

2) Nous pouvons avoir $\kappa_{\mathfrak{p}_0}(\mathcal{C}) = \infty$ sans que $\mathcal{C}$ soit représentable au voisinage de $\mathfrak{p}_0$ dans un système d'axes appropriés sous la forme $\xi_2 = \psi(\xi_1)$.

3) ($\kappa_{\mathfrak{p}_0}(\mathcal{C}) = \infty$) implique pour $\mathcal{C}$ l'existence d'une demi-tangente droite et d'une demi-tangente gauche, celles-ci pouvant former entre elles un angle quelconque.

M. Haupt (24, 221-223) généralisant un résultat de M. Brunold (31) a montré qu'un ensemble plan à courbure de Alt partout infinie est ponctuel, c'est-à-dire que ses composants sont des points ; nous avons remarqué que le contingent d'un tel ensemble en chacun de ses points d'accumulation laisse échapper un rayon issu du point (32) ; avec M. Nöbeling, nous avons émis l'hypothèse que ces ensembles soient dénombrables.

2.2. Courbure de Gödel.

2.21. *Cas d'une courbe.* — La courbure de Alt d'une courbe $\mathcal{C}$ en un point $\mathfrak{p}_0$ sur elle se définit en considérant des triplets de points sur $\mathcal{C}$ voisins de $\mathfrak{p}_0$ dont l'un est fixé en $\mathfrak{p}_0$; si nous assujettissons les deux points variables à encadrer $\mathfrak{p}_0$, nous obtenons une notion de courbure plus large due à M. Gödel. Nous disons donc que $\mathcal{C}$ admet en $\mathfrak{p}_0$ une courbure de Gödel $= \kappa_0$ lorsque

quelles que soient les deux suites de points sur $\mathcal{C}$

$$\mathfrak{p}'_1, \dots, \mathfrak{p}'_m, \dots \quad \text{et} \quad \mathfrak{p}''_1, \dots, \mathfrak{p}''_m, \dots$$

de supports respectifs $p'_1, \dots, p'_m, \dots, p''_1, \dots, p''_m, \dots$, convergeant vers $\mathfrak{p}_0$ et vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{p}'_m \leq \mathfrak{p}_0 \leq \mathfrak{p}''_m \\ p'_m \neq p_0, p''_m \neq p_0, p'_m \neq p''_m \quad m = 1, 2, \dots \\ p_0 = \text{support de } \mathfrak{p}_0 \end{array} \right.$$

(31) dans (11, 12-37). Cf. aussi (10). C'est M. Bouligand qui sous une forme légèrement différente a posé le problème de la structure de ces ensembles (6, 221-222).

(32) Ces ensembles rentrent donc dans la catégorie des ensembles plans à contingent incomplet étudiés par M. Roger dans sa Thèse (44) et par M. Saks (45).

nous avons

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \kappa(p_0, p'_m, p''_m) = \kappa_0.$$

Si p_0 est intérieur, nous ne changeons rien à la définition précédente si nous remplaçons la restriction

$$p'_m \leq p_0 \leq p''_m$$

par la suivante

$$p'_m < p_0 < p''_m$$

laquelle s'interprète intuitivement ainsi : *nous imposons aux suites $p'_1, \dots, p'_m, \dots$ et $p''_1, \dots, p''_m, \dots$ de converger vers p_0 de part et d'autre de p_0 .* C'est sous cette forme que M. Gödel a donné sa définition.

L'existence pour la courbe c d'une courbure de Alt en p_0 entraîne celle d'une courbure de Gödel égale, mais non inversement : si c possède en p_0 une courbure de Gödel finie, c a en p_0 une tangente ordinaire mais pas nécessairement une tangente au sens strict comme c'est le cas pour la courbe du plan des (ξ_1, ξ_2) définie par

$$\xi_2 = 0 \quad \text{si} \quad \xi_1 = 0, \quad \xi_2 = \xi_1^2 \cdot \left(1 + \xi_1 \cdot \sin \frac{1}{\xi_1}\right) \quad \text{si} \quad \left\{ \begin{array}{l} -1 \leq \xi_1 \leq +1 \\ \xi_1 \neq 0 \end{array} \right.$$

à l'origine des coordonnées.

Par analogie nous définissons un *plan osculateur de Gödel* de c en p_0 comme un plan P_0 tel que

quelles que soient les deux suites de points sur c

$$p'_1, \dots, p'_m, \dots \quad \text{et} \quad p''_1, \dots, p''_m, \dots$$

convergeant vers p_0 et vérifiant

$$\begin{cases} p'_m \leq p_0 \leq p''_m \\ p_0, p'_m, p''_m \text{ non alignés} \end{cases} \quad m = 1, 2, \dots$$

nous ayons

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P(p_0, p'_m, p''_m) = P_0.$$

Ici encore, si p_0 est intérieur, nous obtenons une définition équivalente en remplaçant $p'_m \leq p_0 \leq p''_m$ par $p'_m < p_0 < p''_m$.

Les notions de courbure et de plan osculateur de Gödel sont liées à celle de *contingent circulaire* de M. Bouligand (6, 115) : suivant M. Bouligand, nous appelons *contingent circulaire* de c en p_0 relatif à une demi-tangente R à c en p_0 l'ensemble des cercles (év. droites ou cercles-points) de $\mathcal{E}_n$ tels qu'il existe une suite $p_1, \dots, p_m, \dots$

de points sur $\mathcal{C}$ de supports respectifs $p_1, \dots, p_m, \dots$, convergeant vers p_0 , vérifiant

$$p_m \neq p_0, m = 1, 2, \dots, \quad \lim R(p_0, p_m) = R$$

pour laquelle

$$\lim (\text{cercle passant par } p_0 \text{ et tangent à } R \text{ en } p_0) = C,$$

et

contingent circulaire de $\mathcal{C}$ en p_0 la réunion des contingents circulaires relatifs aux rayons du contingent de $\mathcal{C}$ en p_0 .

L'hypothèse que le contingent circulaire de $\mathcal{C}$ en p_0 comprend un seul cercle C_B de rayon $\rho_B \neq 0$, laquelle implique l'existence d'une tangente à $\mathcal{C}$ en p_0 , équivaut

si $\rho_B \neq \infty$, à : $\mathcal{C}$ a en p_0 une courbure de Gödel finie non nulle $= \frac{1}{\rho_B}$

et un plan osculateur de Gödel = plan de C_B ;

si $\rho_B = \infty$, c'est-à-dire si C_B est une droite, à : $\mathcal{C}$ a en p_0 une courbure de Gödel nulle.

A la courbure et au plan osculateur de Gödel est liée la dérivée seconde suivante :

soit $p(-)$ un point fonction continue d'un paramètre τ parcourant l'intervalle $[\alpha\beta]$ avec $\alpha < \beta$, τ_0 une valeur fixée de cet intervalle, nous disons que la fonction p a en τ_0 une *dérivée seconde au sens très large* $= g_0$ lorsque le vecteur

$$[\tau_0, \tau', \tau''; p] = \frac{\overrightarrow{p_0 p''} - \overrightarrow{p_0 p'}}{\frac{\tau'' - \tau_0}{\tau'' - \tau'}} \quad \begin{array}{l} p_0 = p(\tau_0) \\ p' = p(\tau') \\ p'' = p(\tau'') \end{array}$$

a une limite $= g_0$ quand τ' et τ'' tendent vers τ_0 en vérifiant constamment

$$\tau' \neq \tau'' \quad , \quad \tau' \leq \tau_0 \leq \tau''.$$

L'intérêt de cette dérivée seconde réside principalement dans la proposition suivante :

si la fonction p admet en τ_0 une dérivée seconde au sens très large $= g_0$, elle possède en τ_0 une dérivée première $p'(\tau_0) = v_0$ et se laisse développer dans un voisinage de τ_0 sur $[\alpha\beta]$ suivant

$$p(\tau) = p(\tau_0) + (\tau - \tau_0) \cdot v_0 + \frac{(\tau - \tau_0)^2}{2} \cdot (g_0 + h(\tau - \tau_0)),$$

$h(\tau - \tau_0)$ étant un vecteur fonction continue de τ , nul pour $\tau = \tau_0$; inversement, si $\mathbf{p}$ admet dans un voisinage de τ_0 sur $[\alpha\beta]$ un développement de cette forme, elle possède en τ_0 une dérivée première $= \nu_0$ et une dérivée seconde au sens très large $= g_0$.

Supposons que $\mathbf{p}$ admette en τ_0 une dérivée seconde au sens très large $= g_0$; posons $\mathbf{p}'(\tau_0) = \nu_0$; les conséquences géométriques pour la courbe $\mathcal{C} : \mathbf{p}[\alpha\beta]$ au point $\mathbf{p}_0 : \mathbf{p}(\tau_0)$ sont les suivantes :

I si g_0 et ν_0 sont linéairement indépendants, $\mathcal{C}$ admet en $\mathbf{p}_0$ une courbure de Gödel non nulle

$$= \frac{|\nu_0 \wedge g_0|}{|\nu_0|^3}$$

et un plan osculateur de Gödel déterminé par ν_0 et g_0 ;

II si $\nu_0 \neq 0$, $\left\{ \begin{array}{l} g_0 \neq 0, \text{ } g_0 \text{ et } \nu_0 \text{ colinéaires} \\ \text{ou} \\ g_0 = 0 \end{array} \right\}$, $\mathcal{C}$ a en $\mathbf{p}_0$ une courbure

de Gödel nulle, le plan osculateur de Gödel peut ne pas exister;

III si $\nu_0 = 0$, $g_0 \neq 0$, le contingent de $\mathcal{C}$ en $\mathbf{p}_0$ comprend un unique rayon portant g_0 ;

IV si $\nu_0 = 0$, $g_0 = 0$, nous ne pouvons rien affirmer ⁽³³⁾ de $\mathcal{C}$ en $\mathbf{p}_0$.

2.22. *Cas d'un ensemble.* — Soit E un ensemble de $\mathcal{E}_n$, e_0 un de ses points d'accumulation où il admet une tangente ordinaire D_0 , R'_0 et R''_0 les deux rayons opposés du contingent de E en e_0 portés par D_0 .

Convenons que deux suites de points de E

$$e'_1, \dots, e'_m, \dots \quad \text{et} \quad e''_1, \dots, e''_m, \dots$$

convergeant vers e_0 *convergent de part et d'autre* lorsque

quel que soit m , $e'_m \neq e_0$, $e''_m \neq e_0$ et les rayons d'origine e_0 portant respectivement e'_m et e''_m ont chacun une limite lorsque $m \rightarrow \infty$, les deux rayons limites étant R'_0 et R''_0 .

Nous disons alors que

E possède en e_0 une courbure de Gödel $= \nu_0$ lorsque pour deux telles suites quelconques

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \kappa(e'_m, e_0, e''_m) \text{ }^{(33)} = \nu_0.$$

⁽³³⁾ Les triplets (e'_m, e_0, e''_m) sont nécessairement dès que m est assez grand formés de points distincts; nous supposons implicitement qu'il en est ainsi dès $m = 1$.

E possède en e_0 un plan osculateur de Gödel = P_0 lorsque pour deux telles suites, assujetties à la condition supplémentaire

$$e'_m, e_0, e''_m \text{ non alignés pour } m = 1, 2, \dots$$

par ailleurs quelconques

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P(e'_m, e_0, e''_m) = P_0.$$

Exemple. — Considérons le continu C lieu des points (ξ_1, ξ_2) vérifiant

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 - 2\xi_2 \leq 0 \quad \text{et} \quad \xi_1^2 + 2\xi_2^2 - 2\xi_2 \geq 0;$$

il admet à l'origine (0, 0) une courbure de Gödel, égale à la courbure commune en ce point du cercle et de l'ellipse qui le limitent, c'est-à-dire = 1. Notons qu'aucun voisinage de (0, 0) sur C n'est un arc.

2.23. Suites régulières de triplets. — Nous appelons *coefficient de régularité* d'un triplet (q, r, s) de points distincts, le rapport entre la plus petite et la plus grande des trois distances $\delta(qr)$, $\delta(rs)$ et $\delta(sq)$, et nous la représentons par $\lambda(q, r, s)$; nous avons

$$0 < \lambda(q, r, s) \leq 1.$$

Nous disons alors qu'une *suite de triplets* $(q_1, r_1, s_1), \dots, (q_m, r_m, s_m)$, est une *suite régulière* lorsque

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{quel que soit } m, q_m, r_m \text{ et } s_m \text{ sont distincts deux à deux,} \\ \text{les } \lambda(q_m, r_m, s_m) \text{ restent bornés inférieurement par un nombre} \\ \text{positif.} \end{array} \right.$$

Cette notion est liée à celle de courbure de Gödel par la proposition suivante :

une condition nécessaire pour qu'un ensemble E ait en un de ses points d'accumulation e_0 une tangente ordinaire et une courbure de Gödel finie = κ_0 est que

pour toute suite régulière $(e'_1, e_0, e''_1), \dots, (e'_m, e_0, e''_m), \dots$ de triplets de points de E dont un reste fixé en e_0 et telle que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} e'_m = e_0 \quad \lim_{m \rightarrow \infty} e''_m = e_0$$

nous ayons

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \kappa(e'_m, e_0, e''_m) = \kappa_0.$$

Cette condition n'est certainement pas suffisante pour un ensemble quelconque :

considérons l'ensemble E des points a_n ($n = 1, 2, \dots$) du plan de coordonnées polaires

$$\rho_n = e^{-n^2} \quad \omega_n = n \cdot \alpha$$

$\alpha =$ nombre fixe entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

Il n'existe aucune suite régulière de triplets de points de E convergeant vers l'origine o des coordonnées, point limite de la suite $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$; la condition nécessaire qui vient d'être énoncée est par conséquent vérifiée ; cependant pour α incommensurable avec π , le contingent de E en o est complet.

Notons que pour un continu C en un de ses points c_0 existent toujours des suites régulières de triplets de points de C convergeant vers c_0 : en effet, partons d'une suite de nombres positifs $\rho'_1, \dots, \rho'_n, \dots$ convergeant vers 0 ; nous pouvons supposer que, quel que soit n , la péricône ⁽³⁴⁾ S'_n de centre c_0 et de rayon ρ'_n coupe C en au moins un point soit c'_n ; fixons-nous un α positif < 1 ; la péricône S''_n de centre c_0 et de rayon $\rho''_n = \alpha \cdot \rho'_n$ coupe certainement C ; appelons c''_n un point de l'intersection. La suite $(c'_1, c_0, c'_1), (c'_2, c_0, c'_2), \dots, (c'_n, c_0, c'_n), \dots$ est une suite régulière de triplets car

$$\lambda(c'_n, c_0, c''_n) \text{ est } \begin{cases} \geq \frac{\alpha}{1 + \alpha} & \text{si } \alpha \leq \frac{1}{2} \\ \geq \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} & \text{si } \alpha \geq \frac{1}{2} \end{cases} ;$$

ce coefficient de régularité reste donc borné inférieurement par un nombre positif.

A la proposition qui précède relative à un ensemble correspond pour une fonction p définie et continue sur un intervalle $[\alpha, \beta]$ avec $\alpha < \beta$ la suivante :

une condition nécessaire pour que p ait pour la valeur τ_0 une dérivée seconde au sens très large $= g_0$ est que, pour toute suite régulière $(\tau'_1, \tau_0, \tau''_1), \dots, (\tau'_m, \tau_0, \tau''_m), \dots$ de triplets de valeurs de $[\alpha, \beta]$

⁽³⁴⁾ Conformément à la terminologie de M. Blanc (3, 15), nous entendons par péricône de centre c_0 et de rayon ρ l'ensemble des points x de l'espace pour lesquels $\delta(c_0 x) = \rho$.

dont l'une reste fixée en τ_0 et dont les deux autres convergent vers τ_0 , le vecteur

$$[\tau_0, \tau'_m, \tau''_m; \mathbf{p}] = \frac{\frac{\overrightarrow{p_0 p''_m}}{\tau''_m - \tau_0} - \frac{\overrightarrow{p_0 p'_m}}{\tau'_m - \tau_0}}{\frac{\tau''_m - \tau'_m}{2}} \quad \begin{aligned} p_0 &= \mathbf{p}(\tau_0) \\ p'_m &= \mathbf{p}(\tau'_m) \\ p''_m &= \mathbf{p}(\tau''_m) \end{aligned}$$

ait une limite $= g_0$ lorsque $m \rightarrow \infty$.

2.3. Courbure de Menger. — Nous avons défini la courbure de Alt d'un ensemble E de $\mathbb{E}_n$ en un de ses points d'accumulation e_0 en considérant des suites de triplets (e'_m, e''_m, e'''_m) de points distincts de E convergeant vers e_0 , dont l'un reste fixé en e_0 ; sans cette restriction, nous obtenons la notion de courbure de Menger :

nous entendons par courbure inférieure $\gamma_{e_0}(E)$ et courbure supérieure $\bar{\gamma}_{e_0}(E)$ de Menger de E en e_0 (30, 480-481) les bornes inférieure et supérieure respectivement des nombres γ pour lesquels il existe une suite de triplets de points distincts de E

$$(e'_1, e''_1, e'''_1), \dots, (e'_m, e''_m, e'''_m), \dots$$

convergeant vers e_0 , pour laquelle

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \kappa(e'_m, e''_m, e'''_m) = \gamma;$$

nous disons que E jouit en e_0 de la propriété $\text{II}_{\text{str.}}$ lorsqu'il admet en ce point une courbure de Menger finie, c'est-à-dire lorsque

$$\underline{\gamma}_{e_0}(E) = \bar{\gamma}_{e_0}(E) = \text{nombre fini};$$

il est clair que E a alors en e_0 une courbure de Alt finie $\kappa_{e_0}(E)$ ayant la valeur précédente; donc la propriété $\text{II}_{\text{str.}}$ implique la propriété II .

2.31. Structure locale d'un ensemble plan en un point où il admet une courbure de Menger finie. — Afin de caractériser analytiquement la structure locale d'un continu plan, en un point où il admet une courbure de Alt finie, nous avons été amenés à introduire la notion de dérivée seconde au sens large d'une fonction numérique φ ; si maintenant nous voulons caractériser analytiquement la structure locale d'un continu plan en un point où il admet une courbure de Menger finie, nous sommes conduits naturellement à introduire une nouvelle notion, celle de *dérivée seconde continue au sens large* :

soit φ une fonction définie et continue sur un intervalle $[\alpha\beta]$ avec $\alpha < \beta$, τ_0 une valeur fixée de cet intervalle, τ' , τ'' , τ''' trois valeurs variables deux à deux distinctes ; nous disons que φ admet en τ_0 une dérivée seconde continue au sens large égale à ϖ lorsque l'expression

$$[\tau', \tau'', \tau'''; \varphi] = \frac{\frac{\varphi(\tau''') - \varphi(\tau')}{\tau''' - \tau'} - \frac{\varphi(\tau'') - \varphi(\tau')}{\tau'' - \tau'}}{\frac{\tau''' - \tau''}{2}}$$

a une limite $= \varpi$ lorsque $\left. \begin{matrix} \tau' \\ \tau'' \\ \tau''' \end{matrix} \right\} \rightarrow \tau_0$.

Propositions. — La propriété pour φ d'avoir en τ_0 une dérivée seconde finie $= \varpi$ continue au sens large équivaut à l'une quelconque des trois suivantes :

dans un intervalle $J = [\tau_0 - \varepsilon, \tau_0 + \varepsilon]$ ($[\tau_0, \tau_0 + \varepsilon]$ si $\tau_0 = \alpha$, $[\tau_0 - \varepsilon, \tau_0]$ si $\tau_0 = \beta$), $\varepsilon > 0$, φ admet partout une dérivée première finie ; φ a en τ_0 une dérivée seconde au sens classique $= \varpi$; en outre nous avons, τ désignant une valeur variable de J soit

$$\lim_{\tau \rightarrow \tau_0} \varphi(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow \tau_0} \bar{\varphi}(\tau) = \varphi''(\tau_0),$$

soit

$$\lim_{\tau \rightarrow \tau_0} \varphi'(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow \tau_0} \bar{\varphi}'(\tau) = \varphi''(\tau_0) \quad (^{35}),$$

soit la dérivée seconde classique existe pour presque toutes les valeurs τ de J et en se limitant aux τ où elle existe

$$\lim_{\tau \rightarrow \tau_0} \varphi''(\tau) = \varphi''(\tau_0).$$

THÉORÈME XVIII. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un continu plan C admette au point c_0 situé sur lui une courbure de Menger finie est qu'un voisinage de c_0 sur C soit un arc A représentable par $\xi_2 = \psi(\xi_1)$, la fonction ψ étant définie et continue sur un intervalle $[\gamma_1, \gamma_2]$ avec $\gamma_1 < \gamma_2$ et admettant pour l'abscisse $\xi_1^{(0)}$ de c_0 une dérivée seconde finie $\varphi''(\xi_1^{(0)})$ continue au sens large.*

L'expression de la courbure de Menger est alors celle de la courbure classique.

(³⁵) Ce résultat est principalement dû à M. Alt (2, 7).

THÉORÈME XIX. — La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble plan E admette en un de ses points d'accumulation c_0 une courbure finie de Menger est qu'un voisinage de c_0 sur E soit inclus dans un arc A du type mentionné dans l'énoncé du théorème XVIII.

2.32. Structure locale d'un ensemble euclidien en un point où il admet une courbure de Menger finie.

Définition. — Soit $\mathbf{p}(\tau)$ un point de $\mathcal{E}_n$ fonction continue d'une variable τ parcourant l'intervalle de nombres $[\alpha\beta]$, $\alpha < \beta$, τ_0 une valeur fixée située sur cet intervalle, τ' , τ'' , τ''' trois valeurs distinctes deux à deux variables ; nous disons que la fonction $\mathbf{p}$ admet en τ_0 une dérivée seconde continue au sens large $= g_0$ lorsque le vecteur

$$[\tau', \tau'', \tau'''; \mathbf{p}] = \frac{\frac{\vec{p}'p'''}{\tau''' - \tau'} - \frac{\vec{p}'p''}{\tau'' - \tau'}}{\frac{\tau''' - \tau''}{2}} \quad \begin{array}{l} p' = \mathbf{p}(\tau') \\ p'' = \mathbf{p}(\tau'') \\ p''' = \mathbf{p}(\tau''') \end{array}$$

a une limite $= g_0$ lorsque τ' , τ'' et τ''' tendent simultanément vers τ_0 .

Propositions. La propriété pour la fonction $\mathbf{p}$ d'avoir en τ_0 une dérivée seconde continue au sens large $= g_0$ est équivalente à l'une quelconque des deux suivantes :

dans un intervalle $J = [\tau_0 - \varepsilon, \tau_0 + \varepsilon]$ ($[\tau_0, \tau_0 + \varepsilon]$ si $\tau_0 = \alpha$, $[\tau_0 - \varepsilon, \tau_0]$ si $\tau_0 = \beta$), $\varepsilon > 0$, $\mathbf{p}$ admet partout une dérivée première $\mathbf{p}'$, en outre nous avons

soit τ^* et τ^{**} désignant deux valeurs distinctes variables de J

$$\lim_{\substack{\tau^* \} \\ \tau^{**} \} \rightarrow \tau_0} \frac{\mathbf{p}'(\tau^{**}) - \mathbf{p}'(\tau^*)}{\tau^{**} - \tau^*} = g_0,$$

soit la dérivée seconde classique $\mathbf{p}''$ existe en τ_0 et presque partout sur J , $\mathbf{p}''(\tau_0) = g_0$, et en se limitant aux τ où elle existe

$$\lim_{\tau \rightarrow \tau_0} \mathbf{p}''(\tau) = \mathbf{p}''(\tau_0).$$

Nous pouvons exprimer ces résultats ainsi : dire que la fonction $\mathbf{p}$ admet en τ_0 une dérivée seconde continue au sens large, c'est affirmer que la dérivée première de $\mathbf{p}$ existe dans un voisinage de τ_0 sur

$[\alpha\beta]$ et jouit d'une dérivée première continue au sens large en τ_0 ⁽³⁶⁾.

Nous indiquons les propriétés géométriques d'une courbe $\mathcal{C}$: $\mathbf{p}[\alpha\beta]$ en un point $\mathbf{p}_0$: $\mathbf{p}(\tau_0)$ lorsque $\mathbf{p}$ possède pour la valeur τ_0 une dérivée seconde $= g_0$ continue au sens large. Nous définissons d'abord un plan osculateur de Menger ⁽²⁷⁾ pour un ensemble E en un de ses points d'accumulation e_0 comme un plan P_0 tel que

quelle que soit la suite $(e'_1, e''_1, e'''_1), \dots, (e'_m, e''_m, e'''_m), \dots$ de triplets de points de E non alignés convergeant vers (e_0, e_0, e_0) , nous ayons

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{P}(e'_m, e''_m, e'''_m) = P_0, \quad (37)$$

d'où découle naturellement la notion de plan osculateur de Menger pour une courbe $\mathcal{C}$ en un point $\mathbf{p}_0$ sur elle.

Posons alors $\nu_0 = \mathbf{p}'(\tau_0)$, $g_0 = \mathbf{p}''(\tau_0)$; examinons les divers cas qui peuvent se présenter

I ν_0 et g_0 sont linéairement indépendants : $\mathcal{C}$ admet en $\mathbf{p}_0$ une courbure de Menger non nulle

$$= \frac{|\nu_0 \wedge g_0|}{|\nu_0|^3}$$

et un plan osculateur de Menger P_0 déterminé par ν_0 et g_0 ; un voisinage de $\mathbf{p}_0$ sur $\mathcal{C}$ est un arc ⁽²⁹⁾ $\mathbf{p}[\gamma_1\gamma_2]$, $\gamma_1 \leq \tau_0 \leq \gamma_2$, $\gamma_1 \neq \gamma_2$ admettant partout une tangente variant continuellement ; pour presque toutes les valeurs τ de l'intervalle $[\gamma_1\gamma_2]$ en particulier pour $\tau = \tau_0$, $\mathcal{C}$ jouit en $\mathbf{p} : \mathbf{p}(\tau)$ d'une courbure classique $\kappa(\tau)$ et d'un plan osculateur classique $\mathbf{P}(\tau)$;

II $\nu_0 \neq 0$, ν_0 et g_0 linéairement dépendants : $\mathcal{C}$ a en $\mathbf{p}_0$ une courbure de Menger nulle, le plan osculateur de Menger peut ne pas exister ;

III $\nu_0 = 0$, $g_0 \neq 0$: le contingent de $\mathcal{C}$ en $\mathbf{p}_0$ comprend un unique rayon portant g_0 ;

IV $\nu_0 = 0$, $g_0 = 0$: nous ne pouvons plus rien affirmer ⁽³⁰⁾ de $\mathcal{C}$ en

⁽³⁶⁾ Nous avons défini cette notion pour une fonction-point ; la définition se transpose immédiatement à une fonction-vecteur.

⁽³⁷⁾ M. Mirguet (32, 239) définit le biparatingent de E en e_0 comme l'ensemble des plans P jouissant de la propriété suivante : il existe une suite $(e'_1, e''_1, e'''_1), \dots, (e'_m, e''_m, e'''_m), \dots$ de triplets de points de E non alignés convergeant vers (e_0, e_0, e_0) avec $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{P}(e'_m, e''_m, e'''_m) = P$. Si le biparatingent de E en e_0 se réduit à un seul plan P_0 , ce plan est plan osculateur de Menger de E en e_0 , et inversement.

p_0 même pas l'existence d'une tangente comme nous nous en rendons compte en examinant la courbe de $\mathcal{E}_3$

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_1 = \tau^4 \cos \frac{1}{\tau} \\ \xi_2 = \tau^4 \sin \frac{1}{\tau} \\ \xi_3 = \tau^4 \end{array} \right. \quad \text{si } 0 < \tau \leq 1, \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi_1 = 0 \\ \xi_2 = 0 \\ \xi_3 = 0 \end{array} \right. \quad \text{si } \tau = 0$$

pour $\tau = 0$.

Nous disons qu'un ensemble euclidien E possède en un de ses points d'accumulation e_0 un *cercle de courbure de Menger* ⁽²⁷⁾ C_M (pouvant être une droite ou un cercle-point) lorsque le cercle passant par trois points e' , e'' , e''' distincts de E a comme limite C_M lorsque e' , e'' et e''' tendent simultanément vers e_0 .

L'existence d'un cercle de courbure de Menger C_M de rayon ρ_M pour E en e_0 est équivalente à celle d'

une courbure de Menger finie et non nulle $= \frac{1}{\rho_M}$ et d'un plan osculateur de Menger = plan de C_M si $0 < \rho_M < \infty$,

une courbure de Menger nulle si $\rho_M = \infty$,

une courbure de Menger infinie si $\rho_M = 0$.

Appelons avec M. Bouligand (7, 237) *paratingent circulaire* d'un ensemble euclidien E en un de ses points d'accumulation e_0 , l'ensemble des cercles C jouissant de la propriété suivante : il existe une suite $(e'_1, e''_1, e'''_1), \dots, (e'_m, e''_m, e'''_m), \dots$ de triplets de points distincts de E convergeant vers (e_0, e_0, e_0) avec

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (\text{cercle passant par } e'_m, e''_m, e'''_m) = C.$$

Si le paratingent circulaire de E en e_0 se réduit à un seul élément C_0 , ce cercle est cercle de courbure de Menger de E en e_0 ; inversement si E a en e_0 un cercle de courbure de Menger, le paratingent circulaire de E se réduit à ce cercle.

THÉORÈME XX. — *Si un continu C d'un espace euclidien admet en un de ses points c_0 un cercle de courbure de Menger non réduit à un point, un voisinage de c_0 sur C est un arc rectifiable admettant une représentation propre p qui possède pour la valeur τ_0 du paramètre correspondant au point c_0 une dérivée seconde continue au sens large ; comme paramètre, nous pouvons choisir l'abscisse curviligne comptée à partir de c_0 dans le sens de parcours choisi.*

Abordons maintenant les conséquences analytiques de l'existence pour un continu en un de ses points d'une courbure de Menger finie.

THÉORÈME XXI. — Si un continu C de l'espace euclidien E_n admet en un de ses points c_0 une courbure de Menger finie $= \gamma_0$:

un voisinage de c_0 sur C est un arc rectifiable dont la représentation s obtenue en prenant comme paramètre l'abscisse curviligne λ comptée à partir de c_0 dans un sens arbitrairement fixé admet en $\lambda = 0$ une dérivée première v_0 de module 1 ; $\lambda', \lambda'', \lambda'''$ représentant trois valeurs de λ distinctes deux à deux, le vecteur

$$[\lambda', \lambda'', \lambda''' ; s] = \frac{\frac{\vec{c}'c'''}{\lambda''' - \lambda'} - \frac{\vec{c}'c''}{\lambda'' - \lambda'}}{\frac{\lambda''' - \lambda''}{2}} \quad \begin{array}{l} c' = s(\lambda') \\ c'' = s(\lambda'') \\ c''' = s(\lambda''') \end{array}$$

a quand $\left. \begin{array}{l} \tau' \\ \tau'' \\ \tau''' \end{array} \right\} \rightarrow \tau_0$ le vecteur nul comme limite si $\gamma_0 = 0$; si $\gamma_0 \neq 0$

g désignant une quelconque de ses positions limites, g est $\neq 0$ et perpendiculaire à v_0 et

$$|g| = \gamma_0 ;$$

l'ensemble des g est un continu ou bien comprend un seul élément ; ce dernier cas est le seul qui puisse se présenter lorsque $n = 2$, ce qui revient à dire qu'alors s jouit en $\lambda = 0$ d'une dérivée seconde continue au sens large.

THÉORÈME XXII. — La condition nécessaire et suffisante pour qu'un continu euclidien C admette en un de ses points c_0 une courbure de Menger finie $= \gamma_0$ est que un voisinage de c_0 sur C soit un arc A doué d'une tangente variant continuellement, jouissant presque partout et en particulier en c_0 d'une courbure classique, sa valeur en c_0 étant $= \gamma_0$ et limite de la valeur aux points voisins sur A où elle existe.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble euclidien E admette en un de ses points d'accumulation c_0 une courbure de Menger finie $= \gamma_0$ est qu'un voisinage de c_0 sur E soit inclus dans un arc ayant en c_0 une courbure de Menger $= \gamma_0$.

Indiquons l'exemple d'une courbe admettant en un point une courbure classique sans y admettre une courbure de Menger :

soit dans $\mathcal{C}_3$ la courbe définie par

$$p(\tau) = \begin{cases} \xi_1 = \tau^3 \cos \frac{1}{\sqrt{\tau}} \\ \xi_2 = \tau^3 \sin \frac{1}{\sqrt{\tau}} \\ \xi_3 = \tau \end{cases} \quad \text{si } 0 < \tau \leq 1, \quad = \begin{cases} \xi_1 = 0 \\ \xi_2 = 0 \\ \xi_3 = 0 \end{cases} \quad \text{si } \tau = 0 ;$$

elle admet en tous ses points $p(\tau)$ une courbure classique finie $\kappa(\tau)$ et $\kappa(0) = 0$; au point initial la courbure de Menger n'existe pas ce qui tient au fait que $\kappa(\tau)$ n'est pas continue pour $\tau = 0$; $\kappa(\tau)$ présente pour $\tau = 0$ une discontinuité de première espèce

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \kappa(\tau) = \frac{1}{4} \neq \kappa(0).$$

Ce résultat met en évidence qu'une courbure $\kappa(\tau)$ ne jouit pas toujours de la propriété de Darboux, à savoir de passer entre deux valeurs quelconques de l'argument τ_1 et τ_2 par toutes les valeurs intermédiaires entre $\kappa(\tau_1)$ et $\kappa(\tau_2)$; $\xi_1''(\tau)$ et $\xi_2''(\tau)$ comme dérivées en jouissent et offrent pour $\tau = 0$ une discontinuité de seconde espèce, mais non $\xi_1''(\tau) + \xi_2''(\tau)$ ⁽³⁸⁾. La courbe précédente a encore la particularité de posséder partout sauf au point initial un plan osculateur.

THÉOREME XXIII. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un continu euclidien C admette en un de ses points c_0 une courbure de Menger finie $= \gamma_0$ est qu'un voisinage de c_0 sur C soit un arc A doué partout d'une tangente ⁽³⁹⁾ tel que c' et c'' désignant deux points variables distincts de A, le rapport*

$$\left(\frac{\text{angle de la tangente en } c' \text{ avec la tangente en } c''}{\text{longueur de l'arc compris entre } c' \text{ et } c''} \right)$$

ait une limite $= \gamma_0$ pour $\frac{c'}{c''} \rightarrow c_0$.

⁽³⁸⁾ Signalons que deux fonctions φ_1 et φ_2 peuvent jouir de la propriété de Darboux sans qu'il en soit de même de leur somme ainsi que le montre un exemple simple dû à Th. Radakovic (41, 117)

$$\varphi_1(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{si } \tau = 0 \\ \sin \frac{1}{\tau} & \text{si } 0 < \tau \leq 1 \end{cases} \quad \varphi_2(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{si } \tau = 0 \\ -\sin \frac{1}{\tau} & \text{si } 0 < \tau \leq 1. \end{cases}$$

Cette particularité ne peut se présenter si φ_1 et φ_2 sont des dérivées de fonctions continues car alors $\varphi_1 + \varphi_2$ en tant que dérivée de la fonction somme jouit aussi de la propriété de Darboux ; nous pouvons affirmer qu'il n'existe aucune fonction continue définie sur l'intervalle [01] partout dérivable dont la fonction φ_1 (ou φ_2) précédemment indiquée soit la dérivée.

⁽³⁹⁾ Point n'est besoin ici de spécifier « ordinaire ».

La comparaison entre la courbure de Menger et la courbure de Alt résulte du théorème suivant :

THÉOREME XXIV. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un continu euclidien C admette en un de ses points c_0 une courbure de Menger finie $= \gamma_0$ est que*
il admette en c_0 une courbure de Alt $= \gamma_0$,
c désignant un point variable sur C, les courbures inférieure et supérieure de Alt de C en c aient γ_0 comme limite lorsque $c \rightarrow c_0$.

Nous pouvons exprimer ce théorème ainsi : l'existence d'une courbure de Menger finie pour un continu en un point équivaut à l'existence en ce point d'une courbure de Alt égale, continue au sens large.

Nous nous rendons compte que des trois notions de courbure, à savoir celle de Alt, de Gödel et de Menger, c'est la première qui se rapproche le plus de la notion classique.

Terminons ce chapitre en indiquant une nouvelle variante des notions de dérivée seconde, courbure et plan osculateur :

$p(\tau)$ désignant un point de $\mathcal{E}_n$ fonction continue d'une variable τ définie sur un intervalle $[\alpha\beta]$, $\alpha < \beta$, τ_0 une valeur de cet intervalle, nous disons que p admet en τ_0 une dérivée seconde mixte $= g_0$ lorsque pour toute suite régulière de triplets $(\tau'_1, \tau''_1, \tau'''_1), \dots, (\tau'_m, \tau''_m, \tau'''_m), \dots$ de valeurs de $[\alpha\beta]$ convergeant vers τ_0 , le vecteur $[\tau'_m, \tau''_m, \tau'''_m; p]$ a g_0 comme limite pour $m \rightarrow \infty$. Nous avons la proposition suivante : si la fonction p admet en τ_0 une dérivée seconde mixte, dans un voisinage de τ_0 sur $[\alpha\beta]$ existe partout sa dérivée première.

Si dans les définitions de la courbure et du plan osculateur de Menger d'un ensemble E en un de ses points d'accumulation e_0 , nous assujettissons les suites de triplets $(e'_1, e''_1, e'''_1), \dots, (e'_m, e''_m, e'''_m), \dots$ à être des suites régulières, nous obtenons une nouvelle notion de courbure et de plan osculateur que nous nous contentons de signaler.

2. — CAS DES ESPACES DISTANCIÉS GÉNÉRAUX

1. Les suites convergentes de triplets dans les géométries de Bouligand et de Menger. — L'interprétation dans les espaces distanciés des propriétés introduites dans le chapitre précédent est basée sur la remarque suivante due à M. Menger : $\mathcal{O}$ étant un espace

distancié où $\delta(ab)$ désigne la distance de deux de ses points a et b , (p, q, r) un triplet de points de $\mathcal{O}$ distincts deux à deux, nous pouvons trouver dans le plan un triplet (p', q', r') congruent c'est-à-dire tel que

$$\delta(pq) = \text{distance euclidienne de } p' \text{ à } q',$$

$$\delta(qr) = \text{distance euclidienne de } q' \text{ à } r',$$

$$\delta(rp) = \text{distance euclidienne de } r' \text{ à } p'$$

et nous convenons alors de définir les angles $\sphericalangle pqr$, $\sphericalangle qrp$, $\sphericalangle rpq$ comme égaux respectivement à $\sphericalangle p'q'r'$, $\sphericalangle q'r'p'$, $\sphericalangle r'p'q'$, la courbure $\kappa(p, q, r)$ comme $= \kappa(p', q', r')$.

Le triplet de points d'un espace distancié à cause de cette propriété très simple joue un rôle fondamental dans la géométrie directe de M. Menger appelée par lui « géométrie des distances » (Abstandsgeometrie) ; les définitions données jusqu'à présent basées sur la considération de suites de triplets, se transportent aussitôt dans les espaces distanciés généraux, ainsi celle de la courbure de Alt et celle de la courbure de Menger ; notons d'ailleurs qu'elles ont été données par leurs auteurs d'abord pour les espaces distanciés car dans ces espaces ce sont les généralisations de la notion de courbure des courbes qui se présentent le plus naturellement ; ensuite M. Alt et nous-même les avons étudiées dans le cas euclidien afin d'analyser leurs relations avec les notions classiques.

M. Bouligand en édifiant la géométrie différentielle directe des espaces euclidiens, a été conduit à faire usage de suites convergentes de triplets, ainsi lors de la définition du paracontingent et du paratingent circulaires, de même M. Mirguet pour celle du biparatingent, notions dont nous avons mentionné au passage les relations avec la courbure de Alt, la courbure de Menger, le plan osculateur de Menger respectivement ; les suites de triplets apparaissent dans la géométrie différentielle de M. Bouligand, comme dans celle de M. Menger, comme un moyen pour introduire comme limites simples des éléments géométriques du second ordre, de même que les suites de quadruplets permettent l'introduction comme limites simples d'éléments géométriques du troisième ordre comme la sphère surosculatrice à une courbe ou la torsion.

Le rôle attribué aux suites de triplets de points convergeant vers un point, par MM. Bouligand et Menger est un élément important commun à leurs géométries.

2. Interprétation métrique de la propriété I. — E étant un ensemble de l'espace distancié $\mathfrak{D}$ et e_0 un point d'accumulation de E, nous disons que E jouit de la propriété I au point e_0 lorsque

quel que soit $\varepsilon < 0$, il existe un $\rho < 0$, tel que e' et e'' étant deux points quelconques de E distincts de e_0 et distincts entre eux, distants de e_0 de moins de ρ , nous ayons

$$\sin (\sphericalangle e'e_0e'') < \varepsilon ;$$

plus particulièrement, la propriété pour E, lorsque $\mathfrak{D}$ est un espace euclidien, d'avoir en e_0 une tangente de rebroussement, se traduit métriquement par

quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un $\rho > 0$, tel que e' et e'' désignant deux points de E distincts entre eux et distincts de e_0

$$(\delta(e_0e') < \rho) \text{ et } (\delta(e_0e'') < \rho) \longrightarrow (\sphericalangle e'e_0e'' < \varepsilon).$$

De même

$\mathcal{C}$ étant une courbe de l'espace distancié $\mathfrak{D}$ non réduite à un point et $\mathfrak{p}_0$ un point sur $\mathcal{C}$, nous disons que $\mathcal{C}$ jouit en $\mathfrak{p}_0$ de la propriété I lorsque

quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage de $\mathfrak{p}_0$ sur $\mathcal{C}$ tel que $\mathfrak{p}'$ et $\mathfrak{p}''$ étant deux points quelconques lui appartenant, de supports p' et p'' distincts entre eux et distincts du support p_0 de $\mathfrak{p}_0$, nous ayons,

$$\sin (\sphericalangle p'p_0p'') < \varepsilon.$$

Si, lorsque $\mathfrak{p}_0$ est intérieur, nous remplaçons, dans cet énoncé $\sin (\sphericalangle p'p_0p'')$ par $\sphericalangle p'p_0p''$, nous obtenons l'interprétation métrique de la tangente de rebroussement ⁽⁴⁰⁾. Il serait intéressant d'étudier la question de savoir si le théorème sur la dénombrabilité des points d'accumulation d'un ensemble où il admet une tangente de rebroussement est encore valable dans un espace distancié quelconque, ou encore si une courbe rectifiable jouit presque partout de la propriété I, car les démonstrations classiques de ces propositions mettant à contribution le caractère euclidien de l'espace ne permettent pas leur transport immédiat dans le domaine métrique.

3. Interprétation métrique de la propriété $I_{s.r.}$ pour un continu ou une courbe. — *Définition.* — (p, q, r) étant un triplet de points

⁽⁴⁰⁾ plus exactement : de la propriété d'existence d'une tangente de rebroussement.

distincts d'un espace distancié $\mathfrak{D}$, nous désignons par $\varepsilon(p, q, r)$ la somme de ses deux plus petits angles ; évidemment

$$0 \leq \varepsilon(p, q, r) < \frac{2\pi}{3};$$

intuitivement parlant, $\varepsilon(p, q, r)$ mesure l'*aplatissement du triplet* (p, q, r) : plus $\varepsilon(p, q, r)$ est petit, plus le triplet est aplati.

E représentant un ensemble de $\mathfrak{D}$ et e_0 un de ses points d'accumulation, nous convenons de dire que E *est aplati en* e_0 lorsque

quel que soit le nombre $\varepsilon_0 > 0$ donné à l'avance, nous pouvons trouver un $\rho_0 > 0$ tel que e', e'', e''' étant trois points de E distincts deux à deux dont la distance à e_0 soit $< \rho_0$, nous ayons $\varepsilon(e', e'', e''') < \varepsilon_0$.

XXV. THÉORÈME de BOULIGAND (6, 220, exercice 11). — *La condition nécessaire et suffisante pour que dans un espace euclidien un continu C ait en un de ses points c_0 une tangente au sens strict est que C soit aplati en c_0 .*

Ce théorème nous conduit naturellement à nommer propriété I_{str} pour un continu C d'un espace distancié $\mathfrak{D}$ en un de ses points c_0 la propriété d'être aplati en c_0 ; cette propriété implique la propriété I pour C en c_0 . Dans le cas d'une courbe $\mathcal{C}$ de $\mathfrak{D}$ en un point p_0 sur elle, la traduction de la propriété I_{str} s'effectue de manière absolument analogue, aussi ne l'explicitons-nous pas.

3.1. *Structure locale d'un continu distancié compact C en un point d'aplatissement.* — Dans les espaces euclidiens, la propriété I_{str} permettait l'utilisation immédiate des lemmes d'univocité de M. Bouligand (cf. 1-31) ; dans les espaces distanciés nous faisons usage d'une méthode générale due à M. Menger : nous étudions l'intersection de C avec les périsphères de rayon ρ suffisamment petit centrées sur c_0 .

Si le continu distancié compact C est aplati en un de ses points c_0 , dès que ρ est suffisamment petit, cette intersection comprend au plus deux points ; en outre lorsqu'elle comprend deux points, la distance de ceux-ci est voisine de 2ρ ; pour ces deux raisons (⁴¹), il existe un voisinage de c_0 sur C qui est un arc ; de façon plus précise :

(⁴¹) Si nous nous reportons à la démonstration par laquelle M. Bouligand (6, 79) établit que, dans le cas où le paratingent d'un continu plan C en un de ses points c_0 laisse échapper une direction Δ , un voisinage de c_0 sur C est un arc, nous voyons qu'elle est basée sur le fait que les parallèles à Δ suffisamment proches de c_0 rencontrent C en un seul point voisin de c_0 ; ici, ce sont les périsphères qui jouent le rôle des parallèles à Δ .

THÉORÈME XXVI. — Si un continu distancié compact C est aplati en un de ses points c_0 , un voisinage de c_0 sur C est un arc rectifiable dont la longueur d'arc est en c_0 un infiniment petit équivalent à la corde.

Dans l'énoncé de ce théorème nous pouvons remplacer l'hypothèse de la compacité de C , par l'hypothèse de la *compacité locale* de C en c_0 (27, 17) c'est-à-dire supposer qu'un voisinage de c_0 sur C est compact en soi ; il nous apparaît d'ailleurs comme vraisemblable qu'on puisse se débarrasser de l'une ou l'autre de ces hypothèses.

Une propriété pour un continu distancié C en un de ses points c_0 , apparentée à la propriété I_{str} , est la suivante que nous désignons par I^* : les triplets de points distincts de C suffisamment voisins de c_0 ont toujours un angle obtus (6, 220, exercice 10 ; 8, 216-218).

Si elle est vérifiée et si C est localement compact en c_0 , un voisinage de c_0 sur C est un arc rectifiable.

4. Interprétation métrique de la propriété II. — La définition de la courbure de Alt d'un ensemble euclidien basée sur la considération de suites convergentes de triplets s'applique sans modification à un espace distancié $\mathcal{D}$ en un de ses points d'accumulation e_0 ; répétons qu'elle a été donnée par Alt dans ce cas. Nous disons naturellement que $\mathcal{D}$ jouit en e_0 de la propriété II lorsqu'il a en e_0 une courbure de Alt finie.

4.1. Structure locale d'un continu distancié compact C en un point où il possède une courbure de Alt finie. — Commençons par montrer sur un exemple qu'un continu distancié C compact peut jouir en un de ses points a d'une courbure de Alt finie sans qu'aucun voisinage du point sur le continu soit un arc :

considérons dans le plan trois segments $[ax]$, $[ay]$, $[az]$ n'ayant deux à deux en commun que le point a ; C est constitué par la réunion de ces segments et nous prenons comme définition de la distance $\delta(pq)$ de deux points p et q la suivante

1) si p et q se trouvent sur le même segment, $\delta(pq)$ représente la distance euclidienne pq ⁽⁴²⁾,

2) si p et q se trouvent sur deux segments différents

$$\delta(pq) = ap + aq.$$

⁽⁴²⁾ p et q étant deux points d'un espace euclidien, nous notons ici par pq leur distance euclidienne de façon à nous réserver $\delta(pq)$.

Il est clair que cette définition de la distance satisfait aux axiomes de Fréchet ; la topologie qui lui correspond est la topologie euclidienne ; C est donc un continu compact (konvexes Dreiein de Menger, 29, 110). Tous les triplets de C dont un des points est en a ont une courbure nulle, C a donc en a une courbure de Alt $= 0$. Cependant C dans un voisinage de a n'est pas un arc comme nous le voyons en remarquant que ce point est pour le continu un point d'ordre trois. Notons que C n'admet pas en a de courbure de Menger.

L'existence d'une courbure de Alt finie pour un continu distancié C en un de ses points c_0 permet d'affirmer que : *les triplets de points distincts de C voisins de c_0 et comprenant c_0 sont aplatis*. Disons sous une forme précise qu'un continu distancié C jouit en un de ses points c_0 de la *propriété I'* lorsque

quel que soit le nombre $\varepsilon_0 > 0$, il existe un $\rho_0 > 0$ tel que c' et c'' désignant deux points quelconques de C distincts entre eux et distincts de c_0 dont la distance à c_0 soit $< \rho_0$, nous ayons $\varepsilon(c_0, c', c'') < \varepsilon_0$.

Notre affirmation revient à la suivante : la propriété II entraîne la propriété I'.

Pour tirer des conséquences de cette propriété I', nous allons ici encore nous intéresser à l'intersection de C avec les périsphères de centre c_0 et de rayon suffisamment petit ; nous parvenons au lemme suivant dont nous indiquons la démonstration comme *type de raisonnement de la géométrie des distances*.

Lemme. — Si C est un continu distancié compact jouissant en un de ses points c_0 de la propriété I', il existe un nombre $\rho_0 > 0$ tel que pour $\rho < \rho_0$, la périsphère S_ρ ⁽⁴³⁾ de centre c_0 et de rayon ρ coupe C en un nombre fini de points dont les distances mutuelles sont $> \rho\sqrt{2}$.

Démonstration. — Prenons pour ρ_0 un de ceux qui, dans la définition de la propriété I', correspondent à $\varepsilon_0 = \frac{\pi}{2}$. Soit $\rho < \rho_0$, démontrons que C a un nombre fini de points sur S_ρ .

Si $C \cdot S_\rho$ contient moins de deux points, l'affirmation est vérifiée ;

⁽⁴³⁾ S_ρ est relatif à l'espace distancié $\mathcal{D}$ dans lequel est plongé C ; dans le § 2, nous n'avons pas besoin de préciser cet espace $\mathcal{D}$ car les *propriétés* qui y interviennent concernant des ensembles de $\mathcal{D}$ sont *intrinsèques* c'est-à-dire ne mettent en jeu que les distances mutuelles des points de l'ensemble ; nous pouvons par exemple dans l'énoncé du lemme supposer que $\mathcal{D}$ est le continu lui-même.

supposons que $C \cdot S_\rho$ contienne au moins deux points, soient c_1 et c_2 deux d'entre eux ; considérons le triplet (c_0, c_1, c_2)

$$\delta(c_0 c_1) = \delta(c_0 c_2) = \rho ;$$

d'après le choix de $\rho_0, \varepsilon(c_0, c_1, c_2)$ est $< \frac{\pi}{2}$, le triplet (c_0, c_1, c_2) possède donc un angle obtus, c'est nécessairement $\sphericalangle(c_1 c_0 c_2)$, donc

$$\delta(c_1 c_2) = 2\rho \cdot \sin \left(\frac{\sphericalangle c_1 c_0 c_2}{2} \right) > \rho \sqrt{2}.$$

Les points de l'intersection $C \cdot S_\rho$ sont deux à deux à une distance supérieure à une valeur fixe ; mais C est compact et S_ρ fermé ; $C \cdot S_\rho$ est compact en soi et ne peut par suite comprendre une infinité de points.

THÉORÈME XXVII. — *C étant un continu distancié compact jouissant en un de ses points c_0 de la propriété I' , un voisinage de c_0 sur C est constitué par la réunion d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'arcs rectifiables d'origine commune c_0 , n'ayant que ce point en commun et tels qu'il n'y en ait qu'un nombre fini dont le diamètre dépasse tout nombre positif arbitrairement fixé.*

Dans la terminologie de M. Menger (31, 214) nous pouvons nous exprimer plus brièvement et dire : *un continu distancié compact qui jouit en un de ses points c_0 de la propriété I' est en ce point un n -Bein ou un ω -Bein à branches rectifiables.*

Bien que pour un continu, la propriété de posséder en un point une courbure de Alt finie soit une propriété plus restrictive que la propriété I' , sa substitution à I' dans l'énoncé précédent ne nous a pas permis de préciser davantage la structure de C au voisinage de c_0 : nous avons donné l'exemple d'un continu formé par la jonction de trois arcs, admettant au point de jonction une courbure de Alt nulle ; si nous étions partis d'une infinité dénombrable de segments du plan $[ax_1], [ax_2], \dots, [ax_m], \dots$ n'ayant deux à deux en commun que le point a et de longueurs $\rightarrow 0$ quand $m \rightarrow \infty$, le même procédé de métrisation nous aurait fourni un ω -Bein jouissant en a d'une courbure de Alt nulle.

Par contre, en examinant la démonstration du lemme, nous rencontrons une propriété plus faible que I' et qui peut lui être substituée dans l'énoncé du théorème XXVII, à savoir la *propriété $I^{*'} : nous disons qu'un continu distancié C jouit en un de ses points c_0 de$*

la propriété I^* lorsque les triplets constitués par des points distincts de C dont l'un est en c_0 ont un angle obtus dès que leurs côtés sont suffisamment petits. Signalons en outre que le théorème XXVII reste valable si au lieu de supposer C compact, nous supposons seulement la compacité locale de C en c_0 .

4.2. Propriétés $I_{str.}$ et I' dans les espaces euclidiens. — Dans un espace euclidien, le théorème XXVII se simplifie beaucoup ; nous pouvons préciser l'affirmation du lemme par la suivante : pour ρ suffisamment petit, l'intersection $C \cdot S_\rho$ comprend au plus deux points et ceci sans supposer la compacité de C .

Prenons en effet pour ρ_0 un de ceux qui dans la définition de la propriété I' correspondent à $\varepsilon_0 = \frac{2\pi}{3}$. Si $C \cdot S_\rho$ comprenait plus de deux points, soient c_1, c_2, c_3 trois distincts d'entre eux, nous aurions simultanément

$$\nless c_1 c_0 c_2 > \frac{2\pi}{3}, \quad \nless c_2 c_0 c_3 > \frac{2\pi}{3}, \quad \nless c_3 c_0 c_1 > \frac{2\pi}{3};$$

ceci est impossible dans un espace euclidien où la somme des faces d'un trièdre est au plus égale à 2π .

$C \cdot S_\rho$ comprend donc soit un point soit deux points à distance $> \rho \cdot \sqrt{3}$; un *voisinage* de c_0 sur C est donc un arc.

Ce que nous venons de dire pour un espace euclidien s'applique à un espace tétraédral de M. L. Blumenthal, c'est-à-dire à un espace distancié où tout quadruplet de points est congruent à un quadruplet euclidien.

Le résultat précédent est aussi conséquence du

THÉORÈME XXVIII. — *Dans les espaces euclidiens et plus généralement dans les espaces tétraédraux, les propriétés $I_{str.}$ et I' sont équivalentes.*

Ce théorème se déduit immédiatement du lemme suivant : quels que soient les triplets (e_0, e_1, e_2) , (e_0, e_2, e_3) et (e_0, e_3, e_1) d'un espace euclidien ou tétraédral, de sommet commun e_0 , nous avons

$$\varepsilon(e_1, e_2, e_3) \leq \varepsilon(e_0, e_1, e_2) + \varepsilon(e_0, e_2, e_3) + \varepsilon(e_0, e_3, e_1).$$

La démonstration de ce lemme est basée sur la propriété suivante : étant donnés quatre points distincts a, b, c, d , d'un espace euclidien, chacun des angles $\nless bac$, $\nless cad$, $\nless dab$ est inférieur à la somme des deux autres ; c'est l'*inégalité du trièdre*. Il est intéressant

de remarquer que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace distancié soit tétraédral est que pour quatre points distincts quelconques de cet espace soit vérifiée l'inégalité du trièdre. Il est aisé en effet de voir qu'avec les distances mutuelles de quatre points, deux à deux, nous pouvons grâce à cette condition, toujours construire un tétraèdre euclidien.

Le théorème XXVIII n'est pas valable dans les espaces distanciés généraux : reportons-nous en effet au continu C constitué par trois segments $[ax]$, $[ay]$, $[az]$ avec la définition de distance δ indiqué au début de ce paragraphe ; nous voyons que les triplets de points distincts de C dont l'un est en a ont deux angles nuls ; par contre quel que soit $\rho_0 > 0$ et ε_0 avec $0 \leq \varepsilon_0 \leq \frac{2\pi}{3}$, il existe un triplet de points de C , soit (c_1, c_2, c_3) tel que

$$\delta(ac_1) < \rho_0, \quad \delta(ac_2) < \rho_0, \quad \delta(ac_3) < \rho_0$$

et

$$\varepsilon(c_1, c_2, c_3) = \varepsilon_0.$$

Mentionnons donc que

dans les espaces distanciés généraux, la propriété II n'implique pas la propriété I_{str} .

Si donc nous avons voulu respecter le caractère d'échelle pour la suite de propriétés locales I , I_{str} , II , II_{str} , nous aurions dû naturellement appeler propriété I_{str} ce que nous nommons propriété I' ; nous ne l'avons pas fait afin de conserver à la propriété I_{str} le puissant caractère sélectif qu'elle possède dans les espaces euclidiens et qui est exprimé par le théorème XXVI.

4.3. Propriétés I^* et $I^{*'} dans les espaces euclidiens.$ — La propriété I^* mérite d'être examinée dans le cas d'un espace euclidien.

Si nous considérons pour fixer les idées l'espace ordinaire à trois dimensions et nous reportons à l'exercice 10, p. 220 de l'Introduction à la Géométrie Infinitésimale Directe de M. Bouligand, nous voyons qu'en un point c_0 où un continu C jouit de la propriété I^* , le paratingent laisse échapper toutes les directions d'un plan.

Le théorème relatif aux espaces distanciés, à savoir que, *si un continu C jouit en un de ses points c_0 de la propriété I^* , un voisinage de c_0 sur C est un arc rectifiable*, fournit une bonne interprétation métrique des lemmes d'univocité de M. Bouligand relatifs à la sélection des arcs.

Les propriétés I^* et $I^{*'}$ ne sont pas équivalentes dans les espaces euclidiens ; il suffit pour le voir de prendre pour C un système de trois segments de même origine c_0 et faisant entre eux des angles de $\frac{2\pi}{3}$.

Cependant nous pouvons préciser le théorème XXVII : si, dans un espace euclidien, un continu C jouit en un de ses points c_0 de la propriété $I^{*'}$, un voisinage de c_0 sur C est constitué par la réunion d'un nombre fini n^* d'arcs rectifiables n'ayant en commun que l'extrémité c_0 . Dans le cas du plan, il y en a au plus trois : $n^* \leq 3$.

Remplaçons dans la définition de $I^{*'}$

... ont un angle obtus...

par ... ont un angle $> \alpha$, α étant un angle fixé,...

si alors $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, dans tous les espaces euclidiens $n^* \leq 2$, un voisinage de c_0 sur C est un arc ; si $\alpha = \frac{\pi}{3}$, dans le cas du plan $n^* \leq 5$.

Tous ces résultats sont des conséquences faciles à tirer de la méthode générale de recherche de l'ordre de C en c_0 .

4.4. Courbure de Alt et courbure géodésique sur une surface. —

Soit S la surface de l'espace euclidien E_n , image par la correspondance continue p du carré du plan des (τ, ν)

$$-1 \leq \tau \leq +1, \quad -1 \leq \nu \leq +1 ;$$

faisons sur S les hypothèses classiques de la théorie des surfaces c'est-à-dire supposons que les coordonnées du point $p(\tau, \nu)$ admettent des dérivées secondes finies continues en τ et ν ; p' et p'' étant deux points quelconques de S , définissons une distance $\delta(p'p'')$ comme

= plus courte longueur des courbes de S joignant p' à p'' ;

$\delta(p'p'')$ est appelée communément *distance géodésique* de p' à p'' .

THEOREME XXIX. — Si une courbe C de la surface S admet en un de ses points une courbure géodésique finie au sens classique, elle possède lorsque l'on prend comme distance de deux points de S la distance géodésique une courbure de Alt égale.

Cette proposition met en évidence la propriété pour la courbure géodésique des courbes tracées sur une surface d'être un élément invariant vis-à-vis des applications conservant le ds^2 .

5. Propriété $II_{str.}$ dans les espaces distanciés. — La définition de la courbure de Menger d'un ensemble euclidien s'applique immédiatement à un espace distancié $\mathcal{D}$ en un de ses points d'accumulation e_0 ; nous disons que $\mathcal{D}$ jouit en e_0 de la propriété $II_{str.}$ lorsqu'il a en e_0 une courbure de Menger finie.

Proposition. — Dans les espaces distanciés généraux, la propriété $II_{str.}$ implique les propriétés $I_{str.}$ et II.

THÉORÈME XXX. — *Si un continu distancié compact C admet en un de ses points c_0 une courbure de Menger finie $= \gamma_0$:*

un voisinage de c_0 sur C est un arc rectifiable ; C admet en c_0 une courbure de Alt $= \gamma_0$; c désignant un point variable sur C, les courbures inférieure et supérieure de Alt de C en c ont γ_0 comme limite lorsque $c \rightarrow c_0$.

Nous pouvons dire : l'existence d'une courbure de Menger finie pour un continu en un point entraîne l'existence en ce point d'une courbure de Alt égale continue au sens large ; nous ne savons pas si la réciproque de cette proposition est exacte.

La notion de courbure de Gödel ne se transporte pas dans les espaces distanciés généraux ; nous obtenons dans ces espaces une notion de courbure qui lui est apparentée en imposant aux suites de triplets qui interviennent dans la définition de la courbure de Alt d'être des suites régulières.



BIBLIOGRAPHIE

1. ALEXITS, *La torsion des espaces distanciés*, Compositio Mathematica, vol. 6, fasc. 3, pp. 471-477, 1939.
2. ALT, Dissertation, Vienne, 1932.
3. BLANC E., *Les espaces métriques quasi-convexes*, Thèse, Paris, 1938, parue dans les Ann. de l'Ec. Norm. Sup.
4. BLUMENTHAL (Leonard M.), *Distance geometries, A study of the development of abstract metrics*, The University of Missouri Studies, vol. XIII, 1938.
5. BONNESEN et FENCHEL, *Theorie der konvexen Körper*, Springer, Berlin, 1934.
6. BOULIGAND, *Introduction à la Géométrie Infinitésimale Directe*, Vuibert, Paris, 1932.
7. BOULIGAND, *Sur la topologie restreinte du second ordre*, Bull. de la Soc. Math. de France, t. 60, 1932.
8. BOULIGAND, *Discrimination, au moyen de la notion de paratingent, d'une catégorie de continus qui sont des courbes*, Ens. Math., t. 31, 1932.
9. BOULIGAND, *Essai sur l'unité des méthodes directes*, Mém. Soc. Roy. Sc. Liège, t. XIX, 1933.
10. BOULIGAND, *Critères de discontinuité pour les ensembles ponctuels*, Bull. sc. Ec. Pol. de Timisoara, t. 5, 1934.
11. BRUNOLD, Bull. sc. Ec. Pol. de Timisoara, t. 5, 1934.
12. BUSEMANN et FELLER, *Krümmungseigenschaften konvexer Flächen*, Acta Mathematica, t. 66, 1934.
13. BUSEMANN et FELLER, *Bemerkungen zur Differentialgeometrie der konvexen Flächen*, Mat. Tidsskr. B., 1935.
14. DENJOY, C. R., Paris, t. 149, 1909.
15. DENJOY, C. R., Paris, t. 151, 1910.
16. DENJOY, *Sur l'intégration des coefficients différentiels d'ordre supérieur*, Fund. Math., t. XXV, 1935.
17. DURAND G., Acta mathematica, t. 56-57, 1931.
18. FRANKLIN Ph., *Derivatives of higher order as single limits*, Bull. of the Am. Math. Soc., August 1935.
19. FRÉCHET, *Sur une représentation paramétrique intrinsèque de la courbe continue la plus générale*, Journal de Math. p. et app., t. 4, 1925.
20. FRÉCHET, *Les Espaces abstraits*, Gauthier-Villars, Paris, 1928.
21. FRÉCHET, Fund. Math., t. 26, 1936.
22. HARROLD O. G. Jr., *Hereditary Arc Sums*, Duke Math. Journal, vol. 5, March 1939.
23. HAUPT O., *Über Kontinua von endlicher Relativordnung*, Journal für r. und ang. Math., t. 167, 1931.
24. HAUPT O., *Über ebene Punktmengen mit überall unendlicher Krümmung*, Journal für r. und ang. Math., t. 175, 1936.

25. HAUSDORFF, *Mengenlehre*, Walter de Gruyter, Berlin und Leipzig, 1927.
 26. LEBESGUE, *Leçons sur l'Intégration*, Gauthier-Villars, Paris, 1928.
 27. LINSMAN, *Introduction à une théorie abstraite de la notion de l'ordre de figures réelles*, Thèse, Bruxelles 1938, parue dans les Mém. de l'Ac. Roy. de Belgique.
 28. MARCHAUD, *Sur les continus d'ordre borné*, Acta math., t. 55, 1930.
 29. Menger, *Untersuchungen über allgemeine Metrik*, Math. Ann., t. 100, 1928.
 30. Menger, *Untersuchungen über allgemeine Metrik*, Math. Ann., t. 103, 1930.
 31. Menger, *Kurventheorie*, Teubner, Leipzig und Berlin, 1932.
 32. MIRGUET, *Nouvelles recherches sur les notions infinitésimales du premier ordre*, Ann. Ec. Norm. Sup., t. 51, 1934.
 33. PAUC, *De quelques propriétés locales des continus euclidiens*, C. R. Paris, t. 203, 1936.
 34. PAUC, *Courbure dans les espaces métriques*, Rend. Acc. Naz. Lincei, vol. XXIV, 1936.
 35. PAUC, *Images d'ensembles ordonnés, Polygones, Courbes*, Rend. Acc. Naz. Lincei, vol. XXVII, 1938.
 36. PAUC, *Unification des processus générateurs des divers contingents et paratingents*, C. R. Paris, t. 206, 1938.
 37. PAUC, *Topologie des contingents et paratingents*, Rend. Circ. Mat. Palermo, t. LXII, 1938-1939.
 38. PAUC, *Sur la relation entre un point et une de ses projections sur un ensemble*, Revue Scientifique, 1939.
 39. PAUC, *Sur les sommes d'arcs*, Revue Scientifique, 1940.
 40. POPOVICIU, Thèse, Paris, 1933.
 41. RADAKOVIĆ, Monatshefte für Math. und Ph., t. 38, 1931.
 42. ROGER, C. R. Paris, t. 201, 1935.
 43. ROGER, C. R. Paris, t. 202, 1936.
 44. ROGER, C. R. Paris, t. 203, 1936.
 45. ROGER, *Les propriétés tangentielles des ensembles euclidiens de points*, Thèse, Acta Mathematica, t. 69, 1938.
 46. SAKS, *Sur quelques propriétés métriques d'ensembles*, Fund. Math., t. XXVI, 1936.
 47. VALIRON, *Nouv. Ann. Math.*, t. 84, 1927.
 48. WALD, *Begründung einer koordinatenlosen Differentialgeometrie der Flächen*, Erg. eines math. Koll., 7, 1936.
 49. WARD, *On Jordan curves possessing a tangent everywhere*, Fund. Math., t. XXVIII, 1937.
-

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

La méthode métrique en Calcul des Variations

	Pages
INTRODUCTION	1
PRÉLIMINAIRES GÉOMÉTRIQUES.....	6
§ 1. Longueur généralisée. Intégrale de Weierstrass.....	18
§ 2. Existence et semi-continuité de l'intégrale de Weierstrass sur les courbes d'un espace distancié et d'un espace euclidien	28
§ 3. Interprétation géométrique et différentielle dans les espaces euclidiens des propriétés d'un intégrant en un point.....	37
§ 4. Liaison entre la théorie métrique et la théorie de Tonelli....	50
§ 5. Théorèmes d'existence des minimantes et des maximantes	59
§ 6. Le cas ordinaire du Calcul des Variations.....	64
BIBLIOGRAPHIE.....	78

DEUXIÈME PARTIE

Les méthodes directes en Géométrie Différentielle

INTRODUCTION	81
PRÉLIMINAIRES.....	84
§ 1. — <i>Cas des espaces euclidiens</i>	86
1. Tangentes à un ensemble et à une courbe. Propriétés I et I _{str} .	86
2. Courbures d'ensembles. Propriétés II et II _{str}	103
§ 2. — <i>Cas des espaces distanciés généraux</i>	126
1. Les suites convergentes de triplets dans les géométries de Bouligand et de Menger.....	126
2. Interprétation métrique de la propriété I.	128
3. Interprétation métrique de la propriété I _{str} pour un continu ou une courbe	128
4. Interprétation métrique de la propriété II.	130
5. Propriété II _{str} dans les espaces distanciés.....	136
BIBLIOGRAPHIE	137

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

COMPARAISON DE LA FONCTION DE GREEN DANS L'ESPACE ET DANS LE PLAN AU POINT DE VUE DES PROPRIETES DES LIGNES DE PLUS GRANDE PENTE

VU ET APPROUVÉ :

Paris, le 15 septembre 1939.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

CH. MAURAIN

VU ET PERMIS D'IMPRIMER :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

G. ROUSSY

